Matrizenrechnung für Sozialwissenschaftler – Aufgabenblatt

1. Diese Aufgabe beschäftigt sich mit einfachen Operationen für Matrizen. Es werden die Matrizen

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 9 & 7 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} := \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} := \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

und die Vektoren

$$\mathbf{d} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

verwendet.

a) Berechnen Sie:

a1) $3\,\mathbf{A}$

a2) $4\,\mathbf{h}$

a3) $\mathbf{C} + 2\,\mathbf{C}$

a4) $-\mathbf{B}$

b) Erklären Sie, warum $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ nicht berechnet werden kann.

c) Berechnen Sie:

c1) $\mathbf{BA}$

c2) $\mathbf{CB}$

c3) $\mathbf{Bd}$

c4) $\mathbf{hA}$

d) Erklären Sie, warum $\mathbf{AB}$ nicht berechnet werden kann.

e) Berechnen Sie:

e1) $\mathbf{hd}$

e2) $\mathbf{dh}$

f) Berechnen Sie:

f1) $\mathbf{A}'$

f2) $\mathbf{C}'$

f3) $\mathbf{d}'$

f4) $\mathbf{h}'$

g) Zeigen Sie: $\mathbf{A}'\mathbf{B}' = (\mathbf{BA})'$.

h) Schreiben Sie $\mathrm{diag}(1, -3, 5, 6)$ ausführlich als eine Matrix.

i) Schreiben Sie $\mathbf{I}_4$ ausführlich als eine Matrix.

j) Berechnen Sie:

j1) $\mathrm{tr}(\mathbf{C})$

j2) $\mathrm{tr}(\mathbf{B}'\mathbf{B})$

j3) $\mathrm{tr}(\mathbf{BB}')$

j4) $\mathrm{tr}(\mathrm{diag}(1,2,3))$

2. In dieser Aufgabe werden Matrizen für einfache Rechnungen der deskriptiven Statistik verwendet. Es wird folgende Datenmatrix angenommen:

$$\mathbf{X} := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 9 & 5 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Die ihren vier Spalten entsprechenden Variablen werden X_1, X_2, X_3, X_4 genannt.

a) Berechnen Sie für die Variablen $X_1, \ldots, X_4$:

a1) ihre Mittelwerte

a2) ihre Varianzen

b) Berechnen Sie aus $\mathbf{X}$ eine entsprechende Matrix mit zentrierten Variablen. Diese Matrix wird im folgenden $\mathbf{Y}$ genannt.

c) Berechnen Sie aus $\mathbf{X}$ eine entsprechende Matrix mit standardisierten Variablen. Diese Matrix wird im folgenden $\mathbf{Z}$ genannt.

d) Berechnen Sie $\frac{1}{5}\mathbf{1}_5'\mathbf{X}$. Der resultierende Vektor sollte die in Aufgabe (a1) berechneten Mittelwerte enthalten.

e) Berechnen Sie mit der Formel $\mathbf{Y}'\mathbf{Y}/5$ die Kovarianzmatrix für die Variablen $X_1, \ldots, X_4$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit den Rechenergebnissen von Aufgabe (a2). Begründen Sie, warum die resultierende Kovarianzmatrix symmetrisch sein muß.

f) Berechnen Sie die Korrelationsmatrix der Variablen $X_1, \ldots, X_4$ mithilfe der gewöhnlichen aus der Statistik bekannten Methode.

g) Berechnen Sie die Korrelationsmatrix der Variablen $X_1, \ldots, X_4$ mit der Formel $\mathbf{Z}'\mathbf{Z}/5$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem von Aufgabe (f).

3. Diese Aufgabe beschäftigt sich mit der Inversion von Matrizen.

a) Es sei

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Finden Sie die Matrizen $\mathbf{A}^{-1}$ und $\mathbf{B}^{-1}$.

b) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

nicht invertierbar ist. Verwenden Sie den Ansatz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Verwenden Sie die Matrizen

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

um zu zeigen, dass folgende Gleichung gilt:

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

Anmerkung: die Inverse zu $\mathbf{B}$ findet sich im Skript in Abschnitt A.3.

d) Verwenden Sie die Matrix

$$\mathbf{B} := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

um zu zeigen, dass folgende Gleichung gilt:

$$(\mathbf{A}')^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})'$$

e) Es seien die folgenden drei Vektoren gegeben:

$$\mathbf{a}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Linearkombination

$$3\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3$$

f) Zeigen Sie, dass die in Aufgabe (b) angegebene Matrix $\mathbf{A}$ nicht invertierbar ist, indem sie eine nicht-triviale Linearkombination ihrer Spaltenvektoren angeben, die den Nullvektor erzeugt.

g) Es sei

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Finden Sie die inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$.

4. Diese Aufgabe beschäftigt sich mit orthogonalen Vektoren bzw. Matrizen.

a) Finden Sie zu dem Vektor

$$\mathbf{a} := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}'$$

zwei unterschiedliche orthogonale Vektoren.

b) Zeigen Sie, dass $\mathbf{I}_3$ eine orthogonale Matrix ist.

c) Zeigen Sie, dass

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 0.5 & \sqrt{0.75} \\ -\sqrt{0.75} & 0.5 \end{pmatrix}$$

eine orthogonale Matrix ist.

5. Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrix:

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \end{pmatrix}$$

6. Diese Aufgabe beschäftigt sich mit linearer Regression. Für die Variablen X und Y seien folgende Werte gegeben:

X	2	9	3	6	4	5	8
Y	1	7	2	5	3	4	6

a) Betrachten Sie den Regressionsansatz

$$Y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + U$$

wobei $X_1 = 1$ und $X_2 = X$ ist. Schreiben Sie diesen Regressionsansatz in der Form eines linearen Gleichungssystems (7 Gleichungen).

b) Bilden Sie

$$\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{X}'\mathbf{X}, \mathbf{X}'\mathbf{y}$$

c) Zeigen Sie, dass folgende Aussage richtig ist:

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \begin{pmatrix} 0.85145 & -0.13406 \\ -0.13406 & 0.02536 \end{pmatrix}$$

d) Berechnen Sie mit der Formel

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$$

die Lösung der Regressionsaufgabe.

e) Verwenden Sie irgendein Statistik-Programm, dessen Bedienung Sie gelernt haben, um die Lösung der Regressionsaufgabe zu berechnen; und vergleichen Sie die Resultate. (Geben Sie an, welches Statistik-Programm Sie verwendet haben.)

f) Berechnen Sie: $\hat{\mathbf{y}} := \mathbf{X}\hat{\beta}$ und $\hat{\mathbf{u}} := \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}$. Zeigen Sie, dass $\hat{\mathbf{y}}$ und $\hat{\mathbf{u}}$ orthogonal sind.

7. Diese Aufgabe beschäftigt sich mit Anwendungen bei demographischen Projektionen. Es sei folgende Leslie-Matrix gegeben:

$$\mathbf{F} := \begin{pmatrix} 0.0 & 0.6 & 0.7 & 0.0 \\ 0.9 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.9 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.9 & 0.0 \end{pmatrix}$$

Der dominante Eigenwert ist 1.0414.

a) Berechnen Sie die stabile Altersverteilung.

b) Nach wieviel Jahren würde sich die Bevölkerung verdoppeln?

c) Berechnen Sie die Nettoreproduktionsrate.