

Lösungen der Aufgaben für die Klausur (5.2.2009)

Aufgabe 1

- a) Beispiel: Scheidungsrate. Im Zähler steht die Anzahl der Scheidungen während eines Jahres (eine Stromgröße), im Nenner steht die Anzahl der Ehen, die sich in dem Jahr scheiden lassen könnten (eine Bestandsgröße).
- b) Bestandsgrößen: Anzahl der Arbeitslosen an einem Stichtag, Anzahl der Studierenden, die sich in einem Semester an einer Universität eingeschrieben haben.
Stromgrößen: Anzahl der Geburten während eines Monats, Anzahl der Scheidungen während eines Jahres.
- c)

t	n_t	ρ_t
0	90	0.33
1	120	0.25
2	150	

- d) Die durchschnittliche Veränderungsrate ist

$$(150/90)^{1/2} - 1 = 1.291 - 1 = 0.291$$

- e) $(1000 \times 0.05 + 600 \times 0.1)/1600 = 0.069$.

Aufgabe 2

Bei einer Gesamtheit von 20 Personen sind folgende Studiendauern (in Semestern) festgestellt worden: 2, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 10, 10, 10, 12, 12, 12. Die Verweildauervariable für die Studiendauer wird T genannt.

- a) Tabelle mit Funktionen:

t	n_t	$P[T]$	$F[T]$	$G[T]$	$r[T]$
2	1	1/20	1/20	20/20	1/20
3	2	2/20	3/20	19/20	2/19
5	4	4/20	7/20	17/20	4/17
7	2	2/20	9/20	13/20	2/13
8	4	4/20	13/20	11/20	4/11
10	3	3/20	16/20	7/20	3/7
12	4	4/20	20/20	4/20	1/1

- b) $G[T](10) = 7/20$ besagt, dass 7 von 20 Studierenden eine vollendete Studiendauer von mind. 10 Semestern haben.
- c) $M[T|T \geq 10] = 78/7 = 11.1$ ist die durchschnittliche Studiendauer derjenigen, die mindestens 10 Semester studiert haben.

Aufgabe 3

Es sei T die Dauer von Ehen (in vollendeten Jahren). Für alle möglichen Dauern $t = 0, 1, 2, \dots$ sei die Rate $r[T](t) = 0.04$.

- a) $F[T](4) = 1 - G[T](5) = 1 - 0.96^5 = 0.185$. D.h. bei etwa 19% der Ehen beträgt die Ehedauer 4 oder weniger Jahre.
- b) $G[T](4) = 0.96^4 = 0.849$. D.h. bei etwa 85% der Ehen beträgt die Ehedauer 4 oder mehr Jahre.
- c) $P[T](4) = r[T](4)G[T](4) = 0.04 \times 0.96^4 = 0.034$. D.h. etwa 3.4 Prozent der Ehen haben eine Dauer von 4 Jahren.
- d) $G[T|T \geq 4](5) = G[T](5)/G[T](4) = 0.96$.
- e) Zu berechnen ist

$$M[T|2 \leq T \leq 4] = \frac{2P(2) + 3P(3) + 4P(4)}{P(2) + P(3) + P(4)} = \frac{2G(2) + 3G(3) + 4G(4)}{G(2) + G(3) + G(4)} = \frac{2 \times 0.96^2 + 3 \times 0.96^3 + 4 \times 0.96^4}{0.96^2 + 0.96^3 + 0.96^4} = \frac{7.8948}{2.6557} = 2.97$$

d.h. die durchschnittliche Ehedauer derjenigen Ehen, die 2 oder 3 oder 4 Jahre dauern.

Aufgabe 4

In einer Sterbetafel finden Sie für die Altersjahre 95 bis 100 die folgenden Angaben für die noch lebenden Personen: 1000, 900, 700, 500, 300, 100. Niemand wird älter als 100.

- a) Die Sterberate der 97jährigen ist $200/700 = 0.286$.
b) Die fernere Lebenserwartung der 96jährigen ist

$$(96 \cdot 200 + 97 \cdot 200 + 98 \cdot 200 + 99 \cdot 200 + 100 \cdot 100) / 900 - 96 = 97.78 - 96 = 1.78$$

Aufgabe 5

- a) Die Menge der Personen, die 1980 in Deutschland geboren wurden; die Menge der Personen, die 1990 in Deutschland geheiratet haben; die Menge der Personen, die 2006 mit einem Studium begonnen haben.
b) Rechts zensierte Daten treten oft auf, wenn durch retrospektive Interviews Verweildauern (z.B. Ehedauern oder Arbeitslosigkeitsdauern) erhoben werden.
c) Eine links zensierte Information tritt zum Beispiel bei der Erhebung von Ehedauern dann auf, wenn sich eine Person nicht mehr daran erinnern kann, wann sie geheiratet hat.

Aufgabe 6

Bei einer Gesamtheit von 12 Personen sind folgende Arbeitslosigkeitsdauern (in Monaten) festgestellt worden: 4, 9*, 8, 4*, 5, 6, 4, 8*, 9, 11, 8, 4*. Die mit einem Sternchen versehenen Angaben sind rechts zensiert.

- a) Tabelle mit Funktionen:

t	e_t	z_t	R_t	$r(t)$	$G(t)$	$P(t)$
4	2	2	12	2/12	1.0000	0.1667
5	1		8	1/8	0.8333	0.1041
6	1		7	1/7	0.7292	0.1042
8	2	1	6	2/6	0.6250	0.2083
9	1	1	3	1/3	0.4167	0.1389
11	1		1	1	0.2778	0.2778

- b) $P(5) = 0.1041$. D.h. etwa 10 Prozent der Personen haben eine Arbeitslosigkeitsdauer von 5 Monaten.
c) Die durchschnittliche Arbeitslosigkeitsdauer ist ungefähr

$$4 \cdot 0.1667 + \dots + 11 \cdot 0.2777 = 7.7848$$

Aufgabe 7

- a) Div.Index: $1 - [(1/23)^2 + (2/23)^2 + (5/23)^2 + (8/23)^2 + (7/23)^2] = 1 - 0.2703 = 0.7297$. D.h. die Wahrscheinlichkeit, dass zwei zufällig ausgewählte Personen einen unterschiedlichen Studiengang haben, ist etwa 73 Prozent. Der maximale Wert ist $1 - 1/5 = 0.8$.
b) Diss.Index: $\frac{1}{2} (|20/80 - 5/155| + |10/80 - 100/155| + |50/80 - 50/155|) = \frac{1}{2} (0.2177 + 0.5202 + 0.3024) = 0.52$. D.h. etwa 52 Prozent der Männer (oder der Frauen) müssten die Gruppe wechseln, um die Verteilungen in Übereinstimmung zu bringen.