Aufgabensammlung zu Statistik II WS 2005/06

15. Januar 2006

1 Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung 3

1. Die Sonographie ist ein Hilfsmittel zur Diagnose von Brustkrebs. Dazu berichtet die Süddeutsche Zeitung: “Insgesamt war die Sonographie in 2118 Fällen angewandt und die Diagnose mit dem Ergebnis der feingeweblichen Untersuchung verglichen worden. Die mikroskopische Analyse hatte 1180 mal Krebs ergeben, was zu 85% aus dem Ultraschall-Bild ablesbar war. Vor allem aber: Die Treffsicherheit für gutartige Veränderungen lag mit 83% fast ebenso hoch”.

   Erfahrungsgemäß entwickelt sich bei jeder zwanzigsten Frau über 35 Jahren irgendwann einmal Brustkrebs. Frau Huber und Frau Schmidt sind beide älter als 35 jahre. Auf Grund der Sonographie diagnostiziert der Arzt bei Frau Huber Brustkrebs, bei Frau Schmidt hingegen äußert er keinen Verdacht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit könnte Frau Schmidt trotzdem an Krebs erkrankt sein? Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Frau Huber wirklich Krebs?

2. Was ist eine Zufallsvariable?
   - Was ist der Unterschied zwischen einer diskreten und einer stetigen Zufallsvariablen?
   - Welche Unterschiede bestehen bei der Interpretation der Wahrscheinlichkeitsdichte?

3. Definieren Sie bei einem zweifachen Würfel-Experiment die Zufallsvariable X, die jedem Ergebnis die Anzahl der geraden Würfe zuweist. Geben Sie die Wahrscheinlichkeits- und Verteilungsfunktion an.

4. Die Verspätung einer U-Bahn soll als Zufallsvariable konzipiert werden und nach folgender Dichtefunktion darstellbar sein:

   $f(x) = 0.5 - 0.125x$ für $0 \leq x \leq 4$ ansonsten 0

   Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, daß die U-Bahn eine Verspätung zwischen 3 und 4 Minuten hat.

5. Berechnen Sie den Erwartungswert eines 6-seitigen Würfels und eines 10-seitigen Würfels.

6. Gegeben sei eine zweidimensionale Zufallsvariable (X, Y), deren Komponenten unabhängig voneinander sind. Es sei $\widetilde{X} = \{1, 2, 3, 4\}$ und $\widetilde{Y} = \{1, 2\}$. Die Randverteilung von X sei $P(X = 1) = 0.1$, $P(X = 2) = 0.1$, $P(X = 3) = 0.5$, und $P(X = 4) = 0.3$. Die Randverteilung von Y sei durch $P(Y = 1) = 0.2$ und $P(Y = 2) = 0.8$ gegeben. Berechnen Sie die gemeinsame Verteilung der beiden Zufallsvariablen.

7. In einer Region sind 70 % der Einwohner gegen und 30 % für den Bau einer neuen Autobahn. Auf der Durchreise befragen Sie dort 8 zufällig ausgewählte Einwohner, ob diese für oder gegen den Neubau sind.

   - Interpretieren Sie die vorliegende Situation als Beispiel einer Versuchsanordung nach Bernoulli!
   - Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß von 8 Personen
     (a) 3 für den Bau
     (b) 3 gegen den Bau und
     (c) 4 gegen den Bau sind.
   - Wieviel von 8 Personen werden im Durchschnitt für den Neubau sein?

8. Ein Versicherungsvertreter schließt mit 5 Kunden, die alle das gleiche Alter besitzen, Lebensversicherungsverträge ab. Nach der Sterbetafel beträgt die Wahrscheinlichkeit für jeden der 5 Kunden, die nächsten 30 Jahre zu überleben, 0.6. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nach 30 Jahren

   (a) genau 2 Kunden
   (b) alle 5 Kunden
   (c) wenigstens 2 Kunden noch am Leben sind.

9. Stellen Sie sich vor, sie sind auf einer Party eingeladen, auf der der Gastgeber “Strip-Poker” spielen läßt. Sie werden genötigt mitzuspielen. Jeder Teilnehmer hat 5 Kleidungsstücke am Leib. Gespielt wird mit einer germanischen dreiseitigen Rune. Falls Seite 1 (A1) oben liegt müssen Sie ein Kleidungsstück ablegen und die Rune an den nächsten Spieler weitergeben, im Falle der Seite 2 (A2) müssen Sie weitere Kleidungsstücke anziehen (und die Rune weitergeben) und bei Seite 3 (A3) können Sie die Rune an den nächsten Mitspieler weiter geben. Die Wahrscheinlichkeiten sind wie folgt verteilt: $P(A1) = 0.4$; $P(A2) = 0.3$ und $P(A3)$ auch 0.3.

   Frage: Sie müssen 10 Runden spielen, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sie danach noch genau ein Kleidungsstück am Körper haben?

10. Erläutern Sie die wichtigsten Eigenschaften der Normalverteilung.

11. Welche Bedeutung hat die Standardisierung einer normalverteilten Zufallsvariablen?

12. Eine Zufallsvariable ist nach $N(0, 3)$ verteilt. Bestimmen Sie

    (a) $P(X \geq 0)$
    (b) $P(X = 1)$
    (c) $P(X \geq 0.5)$
    (d) $P(X \leq 0.5)$
    (e) $P(X \leq 1)$
    (f) $P(-3 \leq X \leq 3)$

13. Sind X und Y unabhängig und identisch verteilt mit der Verteilungsfunktion F, dann gilt $P(\max(X, Y) \leq u) = P(X \leq u)P(Y \leq u) = F(u)^2$. Sei $F(u) = u, 0 \leq u \leq 1$, $F(u) = 0, u \leq 0$ und $F(u) = 1, u \geq 1$. Berechnen Sie die Dichte und den Erwartungswert von $\max(X, Y)$.