Aufgabensammlung zu Statistik II WS 2005/06

1. November 2005

1 Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

1. Was ist ein Zufallsexperiment? Verdeutlichen Sie Ihre Darstellung am Beispiel des zweifachen Münzwurfes.
2. Klären Sie die folgenden Begriffe im Kontext des Zufallsexperiments:
   a) Ergebnisraum
   b) Elementarereignis
   c) Ereignis
   d) Sicheres Ereignis
   e) Disjunkte Ereignisse
   f) Vereinigung von Ereignisse
3. Fassen Sie folgende Ausdrücke zusammen:
   a) $(A \cap B) \cup (A \cap B)$
   b) $(A \cup B) \cap (A \cup B)$
   c) $A \cap (A \cup B)$
   d) $\overline{(\overline{A})}$
   e) $A \cap (\overline{A} \cup B)$
4. Es sei $A := \{1, 2, 3, 4\}$ und $B := \{3, 4, 5\}$.
   a) Schreiben Sie $A \cup B$ und $A \cap B$ explizit als Mengen.
   b) Bilden Sie die Potenzmengen von A und B.
   c) Bilden Sie das kartesische Produkt $A \times B$ und schreiben Sie es explizit als eine Menge.
   d) Geben Sie $|A|$ und $|B|$ an.
   e) Bilden Sie zunächst das kartesische Produkt $\{a, b\} \times \{1, 2\}$ und geben Sie dann die Potenzmenge $\mathcal{P}(\{a, b\} \times \{1, 2\})$ an.
5. a) Geben Sie ein Beispiel für Mengen A, B, C an, für die gilt: $A \cap (B \cup C) \neq (A \cap B) \cup C$.
   b) Zeigen Sie: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C \iff C \subseteq A$.
6. Erläutern Sie das Laplacesche endliche Gleichmöglichkeitsmodell.
7. Erläutern Sie das frequentistische Wahrscheinlichkeitskonzept. Welche Schwierigkeiten sind mit diesem Konzept verbunden, wenn es auf alle Gebiete ausgeweitet wird, in denen sinnvoll von Massenerscheinungen und relativen Häufigkeiten gesprochen wird.

8. Erläutern Sie die Axiome von Kolmogoroff.
9. Geben Sie für folgende Situationen Wahrscheinlichkeitsräume an:
   a) Wurf mit einer homogenen Münze.
   b) Wurf mit zwei unterscheidbaren homogenen Würfeln.
   c) Wurf mit zwei nicht unterscheidbaren Würfeln.
   d) Ziehen aus einer Urne mit r roten und s schwarzen Kugeln. Die Kugeln seien gut gemischt und nur durch ihre Farben unterscheidbar.
10. Geben Sie die folgenden Ereignisse sowie deren Wahrscheinlichkeiten für den Wurf mit zwei nicht unterscheidbaren Würfeln an:
    a) Die Augensumme ist gleich 2.
    b) Die Augensumme ist gleich 3.
    c) Die Augensumme ist gleich 7.
    d) Die Augensumme ist durch 4 teilbar.
    e) Die Augensumme ist gleich 1.
11. Die Urne A enthält eine schwarze und drei weiße Kugeln, Urne B drei schwarze und eine weiße Kugeln. Ein Zufallsexperiment besteht darin, zunächst eine der Urnen auszuwählen und dann aus dieser Urne zu ziehen. Geben Sie einen passenden Ergebnisraum an.
12. Ein Zufallsexperiment hat 10 verschiedene Ergebnisse: $1, 2, \ldots, 10$. Aus inhaltlichen Überlegungen weiß man, dass Ereignis $\{2\}$ gerade doppelt so wahrscheinlich ist wie $\{1\}$, das Ereignis $\{3\}$ dreimal so wahrscheinlich ist wie $\{1\}$, usw.

    Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für $\{1\}$?
13. Bei einem Roulette-Spiel setzt ein Spieler auf drei Ereignisse. A: 'rot', B: 'ungerade Zahl', C: 'erstes Dutzend' (Zahlen von 1 - 12). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler eine Auszahlung erhält?.
14. In einem zweiten Rouletteexperiment setzt der Spieler auf das erste Dutzend (A) und auf das zweite Dutzend (B) Wie hoch ist in diesem Fall die Gewinnwahrscheinlichkeit?
15. Die Ereignisse A, B und $A \cap B$ haben die Wahrscheinlichkeit $P(A) = 0.7, P(B) = 0.5$ und $P(A \cap B) = 0.4$. Berechnen Sie:
    a) $P(A \cup B)$
    b) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$
    c) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$
    d) $P(\overline{A} \cup B)$
    e) $P(A \cap \overline{B})$
    f) $P(\overline{A \cup B})$
16. Für einen Wurf mit einem roten und einem schwarzen Würfel sei X_1 die zufällige Variable, sie die Augenzahl des roten Würfels angibt, X_2 die zufällige Variable, die die Augenzahl des schwarzen Würfels angibt.
    a) Wie sind die Variablen X_1 und X_2 verteilt?
    b) Wie ist die Summe $X_1 + X_2$ zu interpretieren und wie ist sie verteilt?
    c) Wie ist die zufällige Variable $X_1 X_2$ verteilt?
17. Was versteht man unter einer 'bedingten Wahrscheinlichkeit'?