Aufgabenblatt 4

Häufigkeitsverteilungen, Verteilungsfunktionen, Kreuztabellen

1) Die folgende Tabelle gibt die beiden statistischen Variablen X_1 (Geschlecht, m männlich) und X_2 (Fachsemester) von 10 Studentinnen und Studenten an:

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	ω_9	ω_{10}
$X_1(\omega)$	w	m	m	m	w	w	w	w	m	w
$X_2(\omega)$	1	2	3	2	3	6	3	2	1	1

a) Geben Sie die Menge $(X_1, X_2)(\{\omega_1, \omega_2\})$ explizit an.

b) Geben Sie die Menge $(X_1, X_2)^{-1}(\{(w, 2)\})$ explizit an und berechnen Sie $\mathrm{P}[X_1, X_2](\{(w, 2)\})$.

c) Geben Sie die Menge $(X_1, X_2)^{-1}(\{w\} \times \{1, 2\})$ explizit an und berechnen Sie $\mathrm{P}[X_1, X_2](\{w\} \times \{1, 2\})$.

d) Geben Sie die Menge $(X_1, X_2)^{-1}(\{m, w\} \times \{1\})$ explizit an und berechnen Sie $\mathrm{P}[X_1, X_2](\{m, w\} \times \{1\})$.

e) Geben Sie die Menge $X_2^{-1}(\{1\})$ explizit an und berechnen Sie $\mathrm{P}[X_2](\{1\})$.

f) Geben Sie die Werte der Verteilungsfunktion $F[X_2](1)$, $F[X_2](2)$, $F[X_2](3)$, $F[X_2](4)$ und $F[X_2](6)$ an.

2) Betrachten Sie die statistischen Variablen X_1 und X_2 aus Aufgabe 1. Seien zwei Funktionen f und g durch $f : \tilde{\mathcal{X}}_1 \to \{0, 1\}$, $f(w) = 1$, $f(m) = 0$ und $g : \tilde{\mathcal{X}}_2 \to \{0, 1\}$, $g(1) = g(2) = 0$, $g(3) = g(6) = 1$. Berechnen Sie $(f \circ X_1, g \circ X_2)^{-1}(\{0\} \times \{0\}), (X_1^{-1} \circ f^{-1}, X_2^{-1} \circ g^{-1})(\{(0, 0)\})$, und $\mathrm{P}[f \circ X_1, g \circ X_2](\{(0, 0)\})$.

3) Sei $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_5\}$. Seien $X_1 : \Omega \to \tilde{\mathcal{X}}_1 = \{0, 1\}$ und $X_2 : \Omega \to \tilde{\mathcal{X}}_2 = \{0, 1\}$ zwei statistische Variablen. Die relativen Häufigkeiten $\mathrm{P}[X_1, X_2]$ lassen sich dann als Kreuztabelle darstellen:

		$\widetilde{\mathcal{X}}_2$		
		0	1	
$\widetilde{\mathcal{X}}_1$	0	$\mathrm{P}[X_1, X_2](\{(0, 0)\})$	$\mathrm{P}[X_1, X_2](\{(0, 1)\})$	$\mathrm{P}[X_1](\{0\})$
	1	$\mathrm{P}[X_1, X_2](\{(1, 0)\})$	$\mathrm{P}[X_1, X_2](\{(1, 1)\})$	$\mathrm{P}[X_1](\{1\})$
		$\mathrm{P}[X_2](\{0\})$	$\mathrm{P}[X_2](\{1\})$	

a) Geben Sie die vollständige Tabelle an, die durch $\mathrm{P}[X_1, X_2](\{(0, 0)\}) = 2/5$, $\mathrm{P}[X_1](\{0\}) = 2/5$ und $\mathrm{P}[X_2](\{1\}) = 1/5$ gegeben ist.

b) Geben Sie alle Tabellen an, für die $\mathrm{P}[X_1, X_2](\{(a, b)\}) = \mathrm{P}[X_1](\{a\}) \cdot \mathrm{P}[X_2](\{b\})$ mit $a \in \{0, 1\} \ni b$.

4) Es sei Ω eine Gesamtheit von 40 Haushalten. Die Variable

$$X : \Omega \longrightarrow \widetilde{\mathcal{X}} := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

ordnet jedem Haushalt $\omega \in \Omega$ die Kinderzahl $X(\omega)$ zu. Folgende Werte der Variablen sind festgestellt worden:
1, 1, 3, 2, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 3, 2, 1, 0, 0, 1, 1, 3, 2
1, 3, 2, 1, 0, 0, 1, 1, 3, 2, 0, 0, 0, 4, 2, 5, 1, 3, 2, 1

a) Geben Sie den realisierten Merkmalsraum $X(\Omega)$ an.

b) Bilden Sie eine Tabelle, die für jeden Wert im realisierten Merkmalsraum die absolute und relative Häufigkeit ausweist.

c) Stellen Sie die Häufigkeitsverteilung von X in einem Stabdiagramm dar.

d) Ist $\widetilde{\mathcal{X}^*} := \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3, 4, \ldots\}\}$ eine Partition von $\widetilde{\mathcal{X}}$?

e) Betrachten Sie eine neue Variable $X^* : \Omega \longrightarrow \widetilde{\mathcal{X}^*}$ die durch $X^*(\omega) = \tilde{x}^* :\Longleftrightarrow X(\omega) \in \tilde{x}^*$ für $\tilde{x}^* \in \widetilde{\mathcal{X}^*}$. Stellen Sie die Häufigkeitsverteilung von X^* in einer Tabelle dar.

Verteilungsfunktionen, Histogramme und Quantile

5) Sei $X : \{\omega_1, \ldots, \omega_{50}\} \to \{0, 1, \ldots, 7\} = \tilde{\mathcal{X}}$ eine statistische Variable mit folgender Häufigkeitsverteilung:

$\tilde{x}$	0	1	2	3	4	5	6	7
$50\,\mathrm{P}[X](\{\tilde{x}\})$	5	6	18	6	5	4	3	3

a) Geben Sie die Werte der Verteilungsfunktion $F[X](0)$, $F[X](1)$, $F[X](2)$, $F[X](3)$, $F[X](4)$, $F[X](5)$, $F[X](6)$ und $F[X](7)$ an.

b) Sei $A_1 =]-1, 1], A_2 =]1, 3], A_3 =]3, 5], A_4 =]5, 7]$ eine Partition von $]-1, 7]$. Konstruieren Sie ein Histogramm der Variablen X zu dieser Partition.

c) Sei $g : \tilde{\mathcal{X}} \to \{0, \ldots, 16\}$ durch $g(\tilde{x}) = (\tilde{x} - 3)^2$ gegeben. Berechnen Sie die Werte der Verteilungsfunktion $F[g \circ X](0)$, $F[g \circ X](1)$, $F[g \circ X](2)$,$F[g \circ X](3)$, $F[g \circ X](4)$, $F[g \circ X](5)$, $F[g \circ X](13)$ und $F[g \circ X](16)$an.

d) Sei $I[X \in \{5, 6, 7\}] : \Omega \to \{0, 1\}$ mit $I[X \in \{5, 6, 7\}](\omega) = 1$, falls $X(\omega) \in \{5, 6, 7\}$ und $I[X \in \{5, 6, 7\}](\omega) = 0$, falls $X(\omega) \notin \{5, 6, 7\}$. Berechnen Sie $F[I[X \in \{5, 6, 7\}]](0)$.

e) Berechnen Sie die Quantile $\mathrm{Q}_{0.3}(X)$, $\mathrm{Q}_{0.5}(X)$, $\mathrm{Q}_{0.75}(X)$.