Aufgabenblatt 3

Häufigkeitsverteilungen

1) Gegeben sind folgende Angaben zu zehn Studierenden:

ω	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	ω_9	ω_{10}
Semesterzahl	2	5	7	2	1	3	4	2	5	3
BAföG	ja	nein	nein	nein	ja	ja	nein	ja	ja	nein

   a) Bestimmen Sie passende Merkmalsräume und statistische Variable.
   b) Bestimmen Sie die Häufigkeitsverteilung der Variablen.

2) Sei $X : \{\omega_1, \ldots, \omega_{50}\} \to \{0, 1, \ldots, 7\} = \tilde{\mathcal{X}}$ eine statistische Variable mit folgender Häufigkeitsverteilung:

$\tilde{x}$	0	1	2	3	4	5	6	7
$50\,\mathrm{P}[X](\{\tilde{x}\})$	5	6	18	6	5	4	3	3

   a) Berechnen Sie $\mathrm{P}[X](\{0,1\}), \mathrm{P}[X](\{\tilde{x} \mid \tilde{x} \geq 4\})$ und $\mathrm{P}[X](\{\tilde{x} \mid \tilde{x} \text{ ist gerade} \wedge \tilde{x} > 2\})$.
   b) Sei $g : \tilde{\mathcal{X}} \to \{1, \ldots, 15\}$ durch $g(\tilde{x}) = 2\tilde{x} + 1$ gegeben. Berechnen Sie für die statistische Variable $Y := g \circ X : \Omega \to \{1, \ldots, 15\}$ $\mathrm{P}[Y](\{6\})$ und $\mathrm{P}[Y](\{1, 2, 3, 4, 5\})$.

Kreuztabellen

3) Betrachten Sie zwei statistische Variable mit $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_8\}$, $\widetilde{\mathcal{X}} = \{0,1\}$, $\widetilde{\mathcal{Y}} = \{0,1\}$, und $(X,Y) : \Omega \to \widetilde{\mathcal{X}} \times \widetilde{\mathcal{Y}}$. Von den Häufigkeiten ist nur bekannt:

$$8\mathrm{P}[X](\{0\}) = 8\mathrm{P}[X](\{1\}) = 4$$
$$8\mathrm{P}[Y](\{0\}) = 8\mathrm{P}[Y](\{1\}) = 4$$

Also:

		$\widetilde{\mathcal{X}}$ 0	1	
$\widetilde{\mathcal{Y}}$	0	a	b	4
	1	c	d	4
		4	4	

wobei

$$\begin{aligned} a &:= 8\mathrm{P}[X,Y](\{(0,0)\}) \\ b &:= 8\mathrm{P}[X,Y](\{(1,0)\}) \\ c &:= 8\mathrm{P}[X,Y](\{(0,1)\}) \\ d &:= 8\mathrm{P}[X,Y](\{(1,1)\}) \end{aligned}$$

Bestimmen Sie alle Tabellen $\mathrm{P}[X,Y](\{(i,j)\}), i,j \in \{0,1\}$, die mit diesen Angaben verträglich sind.

4) Betrachten Sie wie oben zwei statistische Variable mit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_8\}$, $\widetilde{\mathcal{X}} = \{0,1\}$, $\widetilde{\mathcal{Y}} = \{0,1\}$, und $(X,Y) : \Omega \to \widetilde{\mathcal{X}} \times \widetilde{\mathcal{Y}}$. Von den Häufigkeiten ist aber nur bekannt:

$$8\mathrm{P}[Y](\{0\}) = 8\mathrm{P}[Y](\{1\}) = 4$$

Also:

		$\widetilde{\mathcal{X}}$ 0	1	
$\widetilde{\mathcal{Y}}$	0	a	b	4
	1	c	d	4

Bestimmen Sie alle Tabellen $\mathrm{P}[X,Y](\{(i,j)\}), i,j \in \{0,1\}$, die mit diesen Angaben verträglich sind.

5) Betrachten Sie die Häufigkeitsverteilung der drei statistischen Variablen A, B, C mit $\tilde{\mathcal{A}} = \{0,1\}, \tilde{\mathcal{B}} = \{0,1\}, \tilde{\mathcal{C}} = \{0,1\}$. Ergänzen Sie die fehlenden Angaben in der folgenden Tabelle:

	$A=0$		$A=1$		$P[C]$
	$B=0$	$B=1$	$B=0$	$B=1$	
$C=0$	0.1	?	?	?	0.3
$C=1$	?	?	0.1	?	?
$P[A,B]$	0.2	?	?	?	
$P[A]$	?		0.7		
$P[B]$	?			0.5	

Mengen und Abbildungen

6) Zeigen Sie:

$$\{x | x \in \mathbb{R} \wedge x \in]0,2[\} = \{x_1 + x_2 | x_1 \in \mathbb{R} \wedge x_2 \in \mathbb{R} \wedge x_1 \in]-1,0[\wedge x_2 \in]1,2[\}$$

7) Sei $X : \Omega \to \widetilde{\mathcal{X}}$ und $B_1, B_2 \subseteq \widetilde{\mathcal{X}}$. Dann ist $X^{-1}(B_i) := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B_i\}, i = 1,2$.

   a) Zeigen Sie, dass
   $$X^{-1}(B_1 \cap B_2) = X^{-1}(B_1) \cap X^{-1}(B_2)$$
   gilt. (Hinweis: Zeigen Sie zunächst die Inklusion $\subseteq$, dann $\supseteq$.)
   b) Zeigen Sie:
   $$X^{-1}(B_1 \cup B_2) = X^{-1}(B_1) \cup X^{-1}(B_2)$$