Dr. U. Pötter — SoSe 2005

Statistik I

Aufgabenblatt 2

Statistische Variablen

1) Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $\tilde{\mathcal{X}} = \{0,1\}$ und $X : \Omega \longrightarrow \tilde{\mathcal{X}}$ eine statistische Variable.

   a) Wie viele verschiedene statistische Variable X gibt es?

   b) Wie viele verschiedene statistische Variable X mit $X(\omega_1) \leq X(\omega_2) \leq X(\omega_3)$ gibt es?

   c) Wie viele verschiedene X mit $|X^{-1}(\{0\})| = 2$ gibt es?

   d) Wie viele verschiedene X mit $|X^{-1}(\{0\})| = 2$ und $X(\omega_1) \leq X(\omega_2) \leq X(\omega_3)$ gibt es?

2) Sei $X : \Omega \longrightarrow \tilde{\mathcal{X}}_1 \times \tilde{\mathcal{X}}_2$ eine statistische Variable mit $|\Omega| = 5$, $\tilde{\mathcal{X}}_1 = \{a, b\}$, $\tilde{\mathcal{X}}_2 = \{c, d\}$.

   a) Konstruieren Sie ein Beispiel mit $|X^{-1}(\{a\} \times \tilde{\mathcal{X}}_2)| = 3$ und $|X^{-1}(\{(a, c)\})| = 2$.

   b) Sei $\tilde{\mathcal{X}}_1 \times \tilde{\mathcal{X}}_2$ lexikographisch geordnet, also $(a, c) \prec (a, d) \prec (b, c) \prec (b, d)$. Wie viele verschiedene statistische Variable X mit $X(\omega_1) \preceq X(\omega_2) \preceq X(\omega_3) \preceq X(\omega_4) \preceq X(\omega_5)$ können unter den Bedingungen von a) konstruiert werden?

   c) Kann es eine statistische Variable mit $|X^{-1}(\{a\} \times \tilde{\mathcal{X}}_2)| = 3$ und $|X^{-1}(\{(a, c)\})| = 4$ geben?

Mengen und Abbildungen

3) Sei $A = \{a, b, c\}$ und $B = \{a, \alpha\}$.

   a) Berechnen Sie $A \cap B$.

   b) Berechnen Sie $A \cup B$.

   c) Berechnen Sie $(A \cup B) \setminus \{\alpha\}$.

   d) Berechnen Sie $\mathcal{P}(B)$.

   e) Berechnen Sie $\mathcal{P}(B) \setminus \{\{\alpha\}\}$.

   f) Berechnen Sie $A \times B$ und $B \times A$.

   g) Berechnen Sie $\{\omega\} \times B$.

   h) Berechnen Sie $\mathcal{P}(\{\omega\} \times B)$.

4) a) Geben Sie ein Beispiel für Mengen A, B, C an, für die gilt: $A \cap (B \cup C) \neq (A \cap B) \cup C$.

   b) Zeigen Sie: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C \Longleftrightarrow C \subseteq A$.

5) Es gilt folgende Beziehung: $\forall\, C, D$: Wenn $C \cap D = \emptyset$, so ist $\mid C \cup D \mid = \mid C \mid + \mid D \mid$. Zeigen Sie zeichnerisch (Venndiagramm), dass im Allgemeinen

$$\mid A \cup B \mid = \mid A \setminus B \mid + \mid B \setminus A \mid + \mid B \cap A \mid$$

gilt. Folgern Sie:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

6) Für drei Mengen A, B, C sei bekannt: $|A| = 15, |B| = 13, |C| = 16$, sowie $|A \cap B| = 8, |A \cap C| = 7, |B \cap C| = 9$ und $|A \cap B \cap C| = 5$. Gesucht ist $|A \cup B \cup C|$.

7) Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $\widetilde{\mathcal{X}} = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2\}$ und $A = \{\omega_1, \omega_2\}$, $B = \{\omega_1, \omega_3\}$. Es ist also $A, B \subseteq \Omega$. Geben Sie ein Beispiel einer Funktion $X : \Omega \to \widetilde{\mathcal{X}}$ mit

$$X(A \cap B) \neq X(A) \cap X(B)$$

8) Sei $X : \Omega \to \widetilde{\mathcal{X}}$ und $B \subseteq C \subseteq \Omega \supseteq A$. Konstruieren Sie jeweils ein Beispiel und zeigen Sie dann allgemein:

   a) $X(B) \subseteq X(C)$

   b) Benutzen Sie a) um zu zeigen:

$$X(A \cap B) \subseteq X(A) \cap X(B)$$

   c) $X(A \cup B) = X(A) \cup X(B)$

9) Sei $A \subseteq \Omega$. Die Indikatorfunktion der Menge A ist die Funktion $I[A] : \Omega \to \{0, 1\}$ mit $I[A](\omega) = 1$, falls $\omega \in A$, $I[A](\omega) = 0$, falls $\omega \in \Omega \setminus A = A^c$. Konstruieren Sie jeweils ein Beispiel und zeigen Sie dann allegemein:

   a) $I[A \cap B] = I[A]I[B]$

   b) $I[A \cup B] = \max\{I[A], I[B]\}$

   c) $I[A^c] = 1 - I[A]$

   d) $A \subseteq B \Leftrightarrow I[A](\omega) \leq I[B](\omega)\ \forall \omega \in \Omega$