

Aufgabenblatt 7

Folgende Leslie-Matrix und folgender Vektor für die weibliche Ausgangsbevölkerung zum Zeitpunkt $t = 0$ sind gegeben:

$$\mathbf{F} := \begin{pmatrix} 0.5 & 0.6 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{n}_0^f := \begin{pmatrix} 6600 \\ 5500 \\ 4500 \end{pmatrix}$$

1. Berechnen Sie

(a) $\mathbf{n}_t^f = \mathbf{F}^t \mathbf{n}_0^f$ für $t = 1, \dots, 8$

(b) $\mathbf{n}_t^{f,P} = \frac{1}{n_t^f} \mathbf{n}_t^f$ für $t = 0, \dots, 8$

(c) ρ_t^f für $t = 0, \dots, 7$

(d) Kann aufgrund der Ergebnisse darauf geschlossen werden, dass der durch die Matrix \mathbf{F} und den Vektor \mathbf{n}_0^f beschriebene demographische Prozess ein Gleichgewicht erreicht? Wenn ja, wodurch ist dieses Gleichgewicht gekennzeichnet?

2. Konstruieren Sie aus der Leslie-Matrix \mathbf{F} die reduzierte Leslie-Matrix $\tilde{\mathbf{F}}$, die auf den reproduktiven Altersbereich beschränkt ist.

3. Berechnen Sie sämtliche Eigenwerte und -vektoren der Matrix $\tilde{\mathbf{F}}$ und konstruieren Sie daraus die intrinsische Wachstumsrate ρ_f^* und stabile Altersverteilung $\mathbf{n}^{f,P}$ des durch \mathbf{F} und \mathbf{n}_0^f beschriebenen demographischen Prozesses.

Hinweis: Die Altersverteilung soll sich auf *alle* Altersklassen beziehen, d.h. ein Element ist rekursiv zu berechnen.

4. Berechnen Sie mit der reduzierten Leslie-Matrix $\tilde{\mathbf{F}}$ die Besetzung der ersten beiden Altersklassen mit Frauen zum Zeitpunkt $t = 8$, indem Sie die Leslie-Matrix zuvor diagonalisieren.

5. Zeigen Sie, wie Aufgabe 3 auch zu lösen ist, indem man sich auf die gesamte Leslie-Matrix \mathbf{F} bezieht.

6. Lösen Sie die Aufgaben 1 (a)-(c) erneut, indem Sie jetzt für das Element f_{11} der Leslie-Matrix 0 statt 0.5 verwenden. Die daraus resultierende modifizierte Leslie-Matrix wird im Folgenden $\mathbf{F2}$ genannt.

Erreicht der demographische Prozess nun weiterhin ein Gleichgewicht?

7. Berechnen Sie sämtliche Eigenwerte und -vektoren von $\mathbf{F2}$ und erläutern Sie, warum an diesen Eigenwerten zu erkennen ist, dass dieser demographische Prozess kein Gleichgewicht erreicht.

ABGABETERMIN: 22.7.2005