Aufgabenblatt 5

Gegeben sind folgende Matrizen und Vektoren:

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v} := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{E} := \begin{pmatrix} 0.0 & 0.6 & 0.6 \\ 0.7 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.8 & 0.0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{n_0} := \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{1_3} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad n_0 = \mathbf{1_3'} * \mathbf{n_0}$$

1. Überprüfen Sie, ob die Zahl 1 ein Eigenwert von $\mathbf{A}$ ist, wenn $\mathbf{v}$ der dazugehörige Eigenvektor ist.

2. Normieren Sie $\mathbf{v}$ auf die Länge 1.

3. Geben Sie sämtliche Eigenwerte und -vektoren der Diagonalmatrix $\operatorname{diag}(1, 3, 2, 1)$ an.

4. Berechnen Sie alle Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{E}$.
   Es sollten sich drei Eigenwerte (ein reeller, zwei komplexe) und drei dazugehörige Eigenvektoren ergeben. Der reelle Eigenwert wird im Folgenden λ_d und sein korrespondierender Eigenvektor $\mathbf{v_d}$ genannt.

5. Berechnen Sie für t = 1, ..., 12 und den reellen Eigenwert λ_d von $\mathbf{E}$:
   (a) $\mathbf{E^t n_0}$
   Der Ergebnisvektor wird im Folgenden $\mathbf{n_t}$ genannt.
   (Hinweis für Berechnungen mit R: Zu beachten ist, dass bspw. mit der Programmzeile „**E**ˆ2“ jedes Element der Matrix **E** einzeln quadriert wird, *nicht* aber die Matrix **E** mit sich selbst multipliziert wird.)
   (b) $\mathbf{1_3' n_t}$
   Der Ergebnisskalar wird im Folgenden n_t genannt.
   (c) $\lambda_d^t n_0$
   Der Ergebnisskalar wird im Folgenden n_t^e genannt.
   (d) Was ist für n_t und n_t^e mit steigendem t-Wert festzustellen?
   (e) Normieren Sie den Eigenvektor $\mathbf{v_d}$ so, dass die Summe seiner Elemente Eins ergibt. Dieser normierte Eigenvektor wird im Folgenden $\mathbf{v_{norm}}$ genannt.
   (f) Berechnen Sie für $t = 0, \ldots, 12$:
   $$\frac{1}{n_t}\mathbf{n_t}$$
   Der Ergebnisvektor wird im Folgenden $\mathbf{n_t^p}$ genannt.
   (g) Was ist festzustellen, wenn Sie die Vektoren $\mathbf{n_t^p}$ mit dem normierten Eigenvektor $\mathbf{v_{norm}}$ vergleichen?

ABGABETERMIN: 24.6.2005