Wahrscheinlichkeit. Begriff und Rhetorik in der Sozialforschung

G. Rohwer
U. Pötter

April 2002

Fakultät für Sozialwissenschaft
Ruhr-Universität Bochum, GB 1
44780 Bochum

goetz.rohwer@ruhr-uni-bochum.de
ulrich.poetter@ruhr-uni-bochum.de

pro.tex April 2002

Vorwort

Der vorliegende Text bildet eine Ergänzung zu unseren „Grundzügen der sozialwissenschaftlichen Statistik“. Die dort vorgelegte Einführung in die statistische Methodenlehre orientiert sich an der Idee, daß statistische Methoden Hilfsmittel sind, um den potentiellen Informationsgehalt jeweils gegebener Daten im Hinblick auf vorgängige Fragestellungen reflektierbar zu machen. Wie in diesen „Grundzügen“ gezeigt worden ist, kommt man dabei im wesentlichen ohne einen Rückgriff auf Vorstellungen und Begriffsbildungen der Wahrscheinlichkeitstheorie aus. Erforderlich wird ein solcher Rückgriff nur in einem speziellen Kontext, in dem man sich gedanklich auf eine Grundgesamtheit bezieht, aus der jedoch nur eine Teilmenge (Stichprobe) zur Gewinnung von Daten ausgewählt worden ist. In diesem Kontext kann ein Rückgriff auf Begriffsbildungen der Wahrscheinlichkeitstheorie helfen, die Idee einer „zufälligen Auswahl“ einer Stichprobe zu präzisieren und Überlegungen der Stichprobentheorie verständlich zu machen, die an diese Idee anknüpfen.

Überblickt man die Literatur zur statistischen Methodenlehre, bemerkt man jedoch, daß fast immer Vorstellungen über „statistische Inferenz“ entwickelt werden, die sich keineswegs auf einen Kontext beschränken, in dem man sich auf Zufallsstichproben aus empirisch voraussetzbaren Grundgesamtheiten beziehen kann. Darin zeigt sich, daß zwei Arten von Fragestellungen miteinander vermischt werden. Einerseits Fragestellungen, die sich auf die Beschaffung von Daten beziehen, wobei die Sachverhalte, die durch die Daten erfaßt werden sollen, als in der Realität gegeben vorausgesetzt werden; andererseits Fragestellungen, die sich auf Prozesse beziehen, durch die Sachverhalte in der Realität entstanden sind oder entstehen könnten. Die Stichprobentheorie knüpft ausschließlich an Fragestellungen der ersten Art an. Sie setzt eine Menge gegebener Sachverhalte voraus, die jedoch aus irgendwelchen Gründen nicht vollständig beobachtet werden können. Daran schließt sich ihre spezielle Fragestellung an: wie man Verfahren zur Auswahl von Beobachtungen so konzipieren kann, daß Schätzfunktionen für statistische Sachverhalte mit Begriffsbildungen der Wahrscheinlichkeitstheorie reflektierbar werden.

Grundsätzlich andere Arten von Fragestellungen entstehen jedoch, wenn man sich gedanklich auf Prozesse bezieht, durch die Sachverhalte entstanden sind oder entstehen könnten. Unseren „Grundzügen“ liegt die Auffassung zugrunde, daß Fragestellungen dieser Art nicht zur statistischen Methodenlehre gehören, sondern auf die Aufgabe verweisen, theoretische Überlegungen – in unserem Kontext: über soziale Prozesse – zu entwickeln. Allerdings ist unklar und wird auch selten diskutiert, wie solche theoretischen Überlegungen konzipiert werden können. In der Methodenliteratur zur empirischen Sozialforschung wird die Aufgabe oft darin gesehen,

„Beziehungen zwischen Variablen“ zu ermitteln und als „probabilistische Gesetze“ zu deuten. Meistens wird auch ohne weitere Diskussion vorausgesetzt, daß Denkansätze und Begriffsbildungen der Wahrscheinlichkeitstheorie zur Konstruktion von Modellen für soziale Prozesse verwendet werden können. Beides soll in diesem Text hinterfragt werden.

In einem einleitenden Kapitel wird der historische Kontext skizziert und die Fragestellung präzisiert: wie in der Geschichte der empirischen Sozialforschung Vorstellungen und Begriffsbildungen der Wahrscheinlichkeitstheorie verwendet worden sind, um probabilistische Deutungen sozialer Prozesse zu entwickeln. Die restlichen Kapitel gliedern sich in zwei Teile. In Teil I werden Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie besprochen. Ziel dieser Überlegungen ist es, die Grundbegriffe so zu verdeutlichen, daß man ein Verständnis für ihre Sinnvoraussetzungen und Sinngrenzen gewinnen kann. In Teil II wird untersucht, wie sich etwa seit Mitte des 19. Jahrhunderts eine probabilistische Sozialstatistik herausgebildet und zu Gedankengängen und Vorstellungen geführt hat, die noch heute in Teilen der Sozialforschung die Denkansätze prägen. Dann wird in einem abschließenden Kapitel besprochen, wie in der gegenwärtigen Methodenliteratur zur Sozialforschung von „Hypothesen über Beziehungen zwischen Variablen“ gesprochen wird und wie sich diese Rhetorik mit Gedankengängen der probabilistischen Sozialstatistik vermischt.

Für hilfreiche Diskussionen und Anmerkungen danken wir Carsten Kuchler und Karin Rinne.

Bochum, April 2002

G. Rohwer, U. Pötter

Inhalt

Kapitel 1

Einleitung

Sozialforschung gibt es in vielen Varianten. In diesem Text beschäftigen wir uns mit Konzeptionen, die ihren historischen Ursprung in der Sozialstatistik haben. Eine gewisse Zusammengehörigkeit gewinnen diese Konzeptionen daraus, daß sie sozialstatistische Daten verwenden und zu ihrer Darstellung statistische Methoden verwenden. Wir sprechen deshalb von *statistischer Sozialforschung*. Unser Interesse gilt in diesem Text allerdings nicht in erster Linie den statistischen Methoden, sondern der Frage, ob und ggf. wie sich statistische Sozialforschung mit theoretischen Erkenntnisinteressen verbinden läßt. Diese Frage ist ziemlich unklar und wird auch nur selten diskutiert.[1] In den meisten Lehrbüchern zur Methodenlehre der empirischen Sozialforschung wird nicht einmal die Problemstellung angedeutet, sondern der Eindruck erweckt, daß theoretische Überlegungen unmittelbar an statistische Begriffsbildungen – nämlich an ein Reden von „Variablen“ und ihren „Beziehungen“[2] – anknüpfen könnten.[3] Schlagwortartig kann man von einer „Variablensoziologie“ sprechen, die sich auf eine schwer verständliche Weise mit einer nomologischen Metaphysik verbindet; z.B. in einem programmatischen Aufsatz über „Soziologie und Statistik“ von E. K. Scheuch und D. Rüschemeyer (1956, S. 348):

> „Abgesehen von einer dauernden Bindung an die empirische Kontrolle stellt sich die von der modernen Wissenschaftslehre ausgehende Soziologie zudem die Aufgabe, über die Beschreibung hinaus allgemeine Gesetze (das heißt Hypothesen über konstante Beziehungen zwischen Variablen) aufzustellen.“

Natürlich gab und gibt es auch Kritik an den verschiedenen Varianten einer „Variablensoziologie“. Aber so berechtigt diese Kritik auch sein mag, beruht sie doch oft ebenfalls auf Mißverständnissen über den potentiellen Sinn und auch die Sinngrenzen statistischer Begriffsbildungen in der Sozialforschung. Das ist das Thema der vorliegenden Arbeit. Es soll untersucht werden, wie durch die Verwendung statistischer Begriffsbildungen in der Sozialforschung – insbesondere unter dem Einfluß von Überlegungen, die ihren Ursprung in der Wahrscheinlichkeitsrechnung haben –

---

[1] Neuere Diskussionsbeiträge findet man z.B. bei J. H. Goldthorpe (2000) und in einem von P. Hedström und R. Swedberg (1998) herausgegebenen Sammelband.

[2] Wir verwenden einfache Anführungszeichen, um auf sprachliche Ausdrücke zu verweisen; doppelte Anführungszeichen werden verwendet, um Zitate kenntlich zu machen oder – wie in diesem Fall – um anzudeuten, daß ein Ausdruck metaphorisch und/oder unklar ist. Wenn nicht anders angegeben, folgen Hervorhebungen in Zitaten stets dem Original.

[3] Exemplarisch sei auf die Lehrbücher von Schnell, Hill und Esser (1999) und von Bortz und Döring (1995) hingewiesen.

durchaus fragwürdige theoretische Orientierungen entstanden sind. Allerdings geht es nicht nur und auch nicht in erster Linie um ideologiekritische Überlegungen. Unser Hauptziel liegt vielmehr darin, zu einem Verständnis statistischer und probabilistischer Begriffsbildungen beizutragen, das einen besseren Ausgangspunkt bilden kann, um darüber nachzudenken, wie sich statistische Sozialforschung mit sozialwissenschaftlichen Fragestellungen verbinden läßt. Insofern handelt es sich der Intention nach um einen Beitrag zur Methodenlehre der Sozialforschung.

1.1 Sozialstatistik

1. Bei einer Untersuchung, die sich mit Begriffsbildungen und theoretischen Orientierungen beschäftigt, ist es nützlich, sich auch an die Geschichte zu erinnern, in der Gedankengänge entstanden sind und sich verändert haben. Eine der Quellen der gegenwärtigen empirischen Sozialforschung ist die Sozialstatistik,[4] an deren Entwicklung in diesem Abschnitt kurz erinnert werden soll. Einige Autoren verlegen die Anfänge der Sozialstatistik bereits in die Zeit erster Volkszählungen, die im Altertum durchgeführt wurden.[5] Eine wichtige Quelle für ihre spätere Entwicklung kann in den Ansätzen zu einer „systematischen Staatsbeschreibung“ gesehen werden, die seit der frühen (europäischen) Neuzeit verfolgt wurden. Eine interessante Dokumentensammlung für den Zeitraum von 1456 bis 1813, ergänzt durch einen ausführlichen Kommentar, wurde von M. Rassem und J. Stagl (1994) herausgegeben.

2. Eine wesentliche Intention dieser frühen Bestrebungen kann exemplarisch anhand einer Schrift von G. W. Leibniz aus dem Jahr 1685 verdeutlicht werden:[6]

> „Ich nenne *Staats-Tafeln* eine schriftliche kurze Verfassung des Kerns aller zu der Landesregierung gehörigen Nachrichtungen, so ein gewisses Land insonderheit betreffen, mit solchen Vorteil eingerichtet, daß der hohe Landesherr alles darin leicht finden, was er bei jeder Begebenheit zu betrachten, und sich dessen als eines der bequemsten Instrumente zu einer löblichen Selbst-Regierung bedienen könne.“

> „Durch *Nachrichtungen* verstehe ich nicht allerhand Vernunftschlüsse und Regeln, so verständige Leute bei Gelegenheit und wenn sie darauf zu denken Ursach haben, selbsten leicht finden können, sondern was mehr in facto als Nachsinnen beruhet und daher nicht erfunden, sondern erfahren, erhöret und erlernet werden

[4] Man vgl. z.B. die Arbeit von W. Bonß (1982).

[5] John (1884, S. 15ff.), v. Mayr (1895, S. 158 ff.). Eine umfassende Sammlung von Informationen zur Geschichte von Volkszählungen gibt es bei Alterman (1969). Interessante Informationen über sozialgeschichtliche Hintergründe finden sich auch bei Lindner, Wohak und Zeltwanger (1984).

[6] Zitiert nach Rassem und Stagl (1994, S. 321–329).

> muß, zum Exempel was in einem Lande für eine Quantität seidener Zeuge oder wüllene Tücher jährlich konsumiert oder vertan werden, das ist eine Nachrichtung und beruhet in facto, es kann es auch keiner erraten, er sei so verständig als er wolle; ob aber ratsam, solche consumation vor sich gehen zu lassen, oder zu verbieten, und enger zu spannen, und ob man solche Manufakturen im Lande selbst einzuführen habe oder nicht, bestehet in ratiocinatio und gehöret nicht zu unserer Staatstafel, sondern kann vielmehr aus denen in der Staatstafel befindlichen Nachrichtungen von verständigen Leuten leicht geschlossen werden.“

Einen gewissen Höhepunkt hat diese Idee einer Staatszustandskunde in der „deutschen Universitätsstatistik“ erreicht, wie sie sich in Deutschland im 17. und 18. Jahrhundert entwickelt hat.[7] Wichtige Vertreter waren u. a. Hermann Conring (1606–1681), Gottfried Achenwall (1719–1772) und August Ludwig von Schlözer (1735–1809), von dem vor allem der Ausspruch berühmt geworden ist: „Geschichte ist fortlaufende Statistik, Statistik ist stillstehende Geschichte.“[8]

3. Während die deutsche Universitätsstatistik darauf aus war, mit Hilfe historisch-beschreibender Methoden möglichst flächendeckende Kenntnisse über die Beschaffenheit von Staatswesen zu erreichen, hat sich parallel, primär in England, eine „Politische Arithmetik“ entwickelt, die darauf abzielte, soziale Sachverhalte möglichst weitgehend „in Zahl-, Gewichts- oder Maßbezeichnungen auszudrücken“.[9] Wichtige Vertreter waren John Graunt (1620–1674); William Petty (1623–1687), der – als Titel eines seiner Bücher – den Namen „Political Arithmetick“ prägte und diese als „the art of reasoning by figures upon things relating to government“ definierte; und Edmund Halley (1656–1742), der das Konzept der Sterbetafeln entwickelt hat. Für Deutschland gilt Johann Peter Süßmilch (1707–1767) als einer der ersten wichtigeren Vertreter der politischen Arithmetik.[10]

4. Die weitere Entwicklung der Sozialstatistik folgte im wesentlichen den Ideen der Politischen Arithmetik. In seiner Programmschrift „Political Arithmetick“ beschrieb Petty ihre Methode auf folgende Weise:

> „Die dazu von mir angewandte Methode ist noch nicht sehr gebräuchlich. Denn anstatt nur komparative und superlative Worte oder intellektuelle Argumente zu gebrauchen, habe ich den Weg eingeschlagen (als ein Muster der Politischen Arithmetik, das ich schon seit langem im Sinn hatte), mich in den Termini *Zahl*,

[7] Eine ausführliche Darstellung der Geschichte der älteren Statistik (bis 1835) findet sich bei John (1884).

[8] Biographische Angaben und Auszüge aus Originalarbeiten finden sich bei Rassem und Stagl (1994).

[9] William Petty, zitiert nach John (1884, S. 185).

[10] Nähere Informationen wiederum bei John (1884), Rassem und Stagl (1994) sowie Porter (1986, S. 18ff.). Eine Zusammenstellung deutscher Übersetzungen seiner Schriften findet sich bei Petty (1986). Auszüge aus den Schriften von Graunt und Halley finden sich bei Newman (1956, Bd. 3).

Gewicht und *Maß* auszudrücken, mich nur aus sinnlicher Erfahrung abgeleiteter Argumente zu bedienen und nur solche Ursachen zu betrachten, die sichtbare Grundlagen in der Natur haben. Dabei überlasse ich solche Argumente den Erörterungen anderer, Argumente, die von wankelmütigen Neigungen, Ansichten, Gelüsten und Leidenschaften einzelner abhängen, da ich in der Tat erklären muß, daß ich mich zu solchen Gründen (wenn man sie überhaupt Gründe nennen darf) nicht äußern kann [...]. Nun sind die durch *Zahl*, *Gewicht* und *Maß* ausgedrückten Beobachtungen oder Thesen, worauf ich die folgenden Darlegungen gründe, entweder wahr oder nicht offensichtlich falsch. Und wenn sie nicht bereits wahr, bestimmt und offensichtlich sind, so kann sie aber die souveräne Macht zu Beobachtungen und Thesen von dieser Art machen, denn *nam id certum est quod certum reddi potest* [dasjenige ist glaubwürdig, was als glaubwürdig dargestellt werden kann]. Und wenn sie falsch sind, dann sind sie nicht so falsch, daß sie das Argument zunichte machen, für das sie vorgebracht werden. Doch schlimmstenfalls taugen sie als Annahmen, um den Weg zu den Kenntnissen zu weisen, nach denen ich strebe."[11]

Wie schon Leibniz in dem oben angeführten Zitat betont auch Petty, daß Wissen über gesellschaftliche Verhältnisse empirisch – durch „aus sinnlicher Erfahrung abgeleitete Argumente" – gewonnen werden muß.

5. Ein zweiter Gesichtspunkt liegt in der Betonung von „Zahl, Gewicht und Maß". Vornehmlich durch diese quantitative Orientierung kam es auch zur Entwicklung eines Gegensatzes zur älteren „Universitätsstatistik". Der Gegensatz, wie er sich etwa bis Mitte des 19. Jahrhunderts herausgebildet hatte, wurde von C. G. A. Knies (1850, S. 81ff.) so dargestellt:

„Man muß unterscheiden: eine historisch schildernde, beschreibende Darstellung, welche in der Vorführung des Stoffes, zur Erreichung der erstrebten Resultate die Methode der geschichtlichen Wissenschaften wählt; und eine mathematisch rechnende, mit Zahlenbestimmungen wirthschaftende, welche die Basis, die Evolutionen, den Calcül der exacten Wissenschaften verlangt und anwendet. [...]

1) Die ganze Achenwall-Schlözersche Schule, von dem Vater der Statistik an bis auf seine spätesten Enkel; die Anhänger der deutschen Universitäts- wie der Büchingschen Statistik, mögen sie Alles und Alles, eine Encyklopädie des Himmels und der Erde oder nur so einzelne Dinge wie die Verfassung oder Verwaltung der Staaten vorführen, haben sich für die beschreibende, schildernde Darstellung der historischen Wissenschaften entschieden. [...]

2) Eine wesentlich von dieser eben geschilderten verschiedene Methode haben andere Statistiker gewählt. Ihre Zahl ist geringer, sie unterscheiden sich untereinander außerdem in mancher anderen Beziehung, aber darin stimmen sie überein, daß nur das in Zahlen ausgedrückte und ausdrückbare Datum Gegenstand der Statistik sei, daß die bloße Schilderung, die historische Beschreibung aus der statistischen Wissenschaft zu verbannen sei. [...]

Es steht sich gegenüber die mit Worten zu beschreibende Thatsache und das von der Zahl begleitete Datum, die Schilderung der Phrase und das exacte Maß

[11] Zitiert nach der dt. Übersetzung der Ausgabe von 1690, in Petty (1986, S. 221f.).

der Ziffer, das Bild, das Gemälde mit seinem allgemeinen Umriß und der exacte Calcul."

6. In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts setzte sich mehr und mehr die zweite der beiden von Knies unterschiedenen Konzeptionen der Sozialstatistik durch. Gegen Ende des 19. Jahrhunderts entwickelte insbesondere Georg v. Mayr (1841–1925) eine in Deutschland für längere Zeit dominierende Auffassung der Sozialstatistik, deren Grundgedanken er folgendermaßen darstellte:

„Die Wissenschaft von den sozialen Massen. Aus der geordneten Beobachtung der einzelnen Elemente der vorbezeichneten sozialen Massen erwächst der wissenschaftliche Gewinn des Einblicks in den Bestand und die Gliederung der Massen und damit der Erkenntniß aller in diesen Massen zum Ausdruck kommenden gesellschaftlichen Zustände und Erscheinungen. Am vollständigsten ist diese Erkenntniß einer sozialen Masse dann, wenn erschöpfende Beobachtung sämmtlicher Elemente, aus denen sie zusammengesetzt ist, vorliegt, und wenn diese Beobachtung zugleich in exakter Weise, d. h. mittelst Zählens und Messens, durchgeführt wird. Der Grundgedanke der so gearteten wissenschaftlichen Arbeit ist, aus der exakten Beobachtung der Elemente, aus deren angemessener Gruppierung, Gliederung und Vergleichung die Erkenntniß des Ganzen, d. i. der sozialen Masse zu gewinnen. [...]

Am vollkommensten wird diese Erforschung der sozialen Masse durch die erschöpfende Massenbeobachtung ihrer Elemente in Zahl und Maß bewerkstelligt. Die so geartete wissenschaftliche Erforschung der sozialen Masse nennen wir *Statistik*. Die Statistik ist hiernach recht eigentlich die Wissenschaft von den sozialen Massen." (v. Mayr 1895, S. 5)

Als Definition des Wortes 'Statistik' sind diese Ausführungen sicherlich nicht mehr gültig, denn die Statistik hat sich schon zu Lebzeiten v. Mayrs weitgehend zu einer Methodenwissenschaft entwickelt.[12] Sie verdeutlichen

[12] Hinweise finden sich bei Porter (1986, S. 235f.). Porter erwähnt u. a. J. J. Fox, „who argued in 1860 in a paper read before the Statistical Society of London: Statistics cannot really be called a science, since it 'has no facts of its own; in so far as it is a science, it belongs to the domain of Mathematics. Its great and inestimable value is, that it is a 'method' for the prosecution of other sciences. It is a 'method of investigation' founded upon the laws of abstract science; founded on the mathematical theory of probabilities; founded upon that which had been happily termed the logic of large numbers.' " v. Mayrs Auffassung, daß die Statistik – jedenfalls als Sozialstatistik – als eine selbständige Wissenschaft konzipiert werden sollte (vgl. v. Mayr, 1907), ist auch dadurch obsolet gemacht worden, daß ihr Gegenstandsbereich durch die sich differenzierenden Sozialwissenschaften okkupiert worden ist. W. Wundt sagte dazu in seiner „Logik" (1908, S. 494) : „Ursprünglich bedeutet bekanntlich das Wort 'Statistik' nichts anderes als 'Staatskunde', fällt also vielmehr mit der heutigen Staatswissenschaft als mit der Bevölkerungslehre zusammen. Dann wurde es speziell auf die im politischen Interesse angewandten Abzählungsmethoden, auf die sogenannte 'politische Arithmetik', und von da aus auf die Bevölkerungslehre und alle die Gebiete, die auf die Anwendung ähnlicher quantitativer Methoden angewiesen sind, übertragen. (Vgl. John, Geschichte der Statistik, 1884.) Nach dieser Verallgemeinerung, nach der von 'statistischen Methoden' auch auf den Gebieten der Naturwissenschaft, z.B. in der Metereologie, und der

jedoch ein Verständnis von *Sozialstatistik*, das bis heute fortlebt. Das wesentliche Ziel besteht darin, mit Hilfe von systematisch erhobenen Daten und sich daran anschließenden statistischen Begriffsbildungen gesellschaftliche Verhältnisse zu beschreiben.

1.2 Theoretische Ansprüche

1. Nicht nur im Hinblick auf das heutige Verständnis von Statistik als Methodenlehre sind die Ausführungen v. Mayrs nicht mehr zutreffend. Auch im Hinblick auf das heutige Selbstverständnis empirischer Sozialforschung, soweit sie statistische Methoden verwendet, gibt es nur noch wenige Berührungspunkte. Orientiert man sich an der gegenwärtigen Methodenliteratur, geht es in der empirischen Sozialforschung nicht in erster Linie darum, gesellschaftliche Verhältnisse zu beschreiben (dies erscheint bestenfalls als Aufgabe einer separat konzipierten „Wirtschafts- und Sozialstatistik“), sondern es wird angestrebt, soziale Sachverhalte und ihre Entwicklung zu *erklären*. Verbreitet hat sich insbesondere eine Rhetorik, wonach das Ziel empirischer Sozialforschung in der Formulierung und Prüfung „hypothetischer Gesetzmäßigkeiten“ besteht, von denen angenommen wird, daß sie das gesellschaftliche Leben beherrschen.[13]

2. Welche Vorstellungen sich hinter dem gegenwärtigen Selbstverständnis empirischer Sozialforschung verbergen, ist schwer durchschaubar. Eine Möglichkeit, um einem Verständnis auf indirekte Weise näher zu kommen, besteht darin, zu untersuchen, wie in der Geschichte der Sozialstatistik *theoretische* Fragestellungen konzipiert und verfolgt worden sind. Wie sich zeigen wird, haben viele der dafür grundlegenden Begriffsbildungen und Gedankengänge ihren Ursprung in der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung.[14] Eine unserer Aufgaben besteht also darin, daß wir herauszufinden versuchen, wie sich durch die Übernahme wahrscheinlichkeitstheoretischer Begriffsbildungen und Vorstellungen eine – ihrem Anspruch

Psychologie, z.B. in der Psychophysik, geredet werden kann, ist es offenbar das einzig richtige, unter Statistik nur noch eine Methode, aber keine besondere Wissenschaft zu verstehen. Auch ist der Ausdruck im letzteren Sinne umso überflüssiger, als es kein Gebiet gibt, in welchem die statistische Methode angewandt wird, das nicht nach anderen sachlicheren Merkmalen bereits zureichend definiert und benannt wäre.“ Zahlreiche Hinweise zur vielfach strittigen Diskussion über das Verhältnis von Soziologie und Statistik, bevor diese allgemein als eine Methodenlehre aufgefaßt worden ist, findet man auch bei F. Zizek (1912).

[13]Man erinnere sich an das eingangs angeführte Zitat von Scheuch und Rüschemeyer.

[14]Es gibt bereits eine Reihe von Untersuchungen, in denen dies erörtert worden ist. Hinzuweisen ist zunächst auf die beiden Bände zur „Probabilistic Revolution“, die von L. Krüger u. a. (1987) herausgegeben worden sind; weiterhin auf „The Empire of Chance“ von G. Gigerenzer u. a. (1989) und die Monographie zur Geschichte der Ökonometrie von M. S. Morgan (1990).

nach – *theoretische* Sozialstatistik herausgebildet hat, etwa seit der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts.

3. Die Einflüsse der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Sozialstatistik kommen noch heute darin zum Ausdruck, daß in der statistischen Methodenlehre, wie sie in den Sozialwissenschaften vermittelt und angewendet wird, oft zwischen einer „deskriptiven“ und einer „schließenden“ Statistik unterschieden wird. Zum Beispiel heißt es in einem neueren Lehrbuch von D. Hochstädter (1991):

> „Man kann zwei Erkenntnisziele der Statistik unterscheiden: *deskriptive Statistik* $\longleftrightarrow$ *schließende Statistik*. Die deskriptive Statistik beschränkt sich auf die reine *Beschreibung* der erhobenen Massenerscheinung. Ihr Gegenstand sind Umfang, Gliederung, graphische Darstellung oder zeitliche Entwicklung des erhobenen Datenmaterials sowie die Verhältnisse verschiedener Massen zueinander.
>
> Die *schließende Statistik* versucht aus den Beobachtungen allgemeingültige Aussagen zu erhalten. Dazu verwendet sie vor allem den Schluß von einer *bekannten* Teilmasse (Stichprobe) auf die *unbekannte* Grundgesamtheit. Ihr Gegenstand ist die Schätzung von unbekannten (Verteilungs-) Parametern und das Prüfen von (Grundgesamtheits-) Hypothesen. Grundlage dazu bildet die *Wahrscheinlichkeitsrechnung*.“ (Hochstädter 1991, S. 6)

Die Erläuterungen zur „schließenden Statistik“ sind allerdings ambivalent. Einerseits beziehen sie sich auf die Frage, wie man Hypothesen, die sich auf Merkmalsverteilungen in jeweils bestimmten Gesamtheiten beziehen, auf der Grundlage von unvollständigen Daten einschätzbar machen kann. Bei *diesen* Hypothesen würde es sich um die von einer deskriptiven Sozialstatistik intendierten Aussagen handeln, die nur infolge mangelhafter Daten als mehr oder weniger wahrscheinliche Hypothesen formuliert werden müssen. Andererseits soll jedoch die „schließende Statistik“ dazu dienen, „allgemeingültige Aussagen“ zu begründen, also Aussagen oder Hypothesen, die sich nicht auf Merkmalsverteilungen in einem abgrenzbaren Raum-Zeit-Gebiet beziehen, sondern „allgemeine Regelmäßigkeiten“ zum Ausdruck bringen.[15]

4. Diese Ambivalenz durchzieht fast regelmäßig die Erläuterungen zur Inferenzstatistik in der Methodenliteratur.[16] Es ist deshalb sinnvoll, hier

[15]In einer Erläuterung, die sich an das angeführte Zitat anschließt, sagt Hochstädter: „Will man dagegen die Erhebungsdaten verwenden, um allgemeine Regelmäßigkeiten zu erkennen, die nicht nur für die speziellen Erhebungsfälle gelten, sondern allgemeine Gültigkeit besitzen, dann spricht man von *statistischer Inferenz*.“ Der hier verwendete Begriff ‘statistische Inferenz’ ist offenbar gleichermaßen ambivalent.

[16]Hier noch ein weiteres Beispiel aus einem verbreiteten Lehrbuch von H. M. Blalock (1972, S. 4): „. . . we shall say that statistics has two very broad functions. The first of these functions is description, the summarizing of information in such a manner as to make it more usable. The second function is induction, which involves either making generalizations about some population, on the basis of a sample, drawn from this population, or formulating general laws on the basis of repeated observations.“

gleich zu Beginn auf eine Unterscheidung hinzuweisen. Sozialstatistik im Sinne eines empirischen Unternehmens hat es stets mit real existierenden und infolgedessen endlichen Gesamtheiten von Dingen, Menschen oder Situationen zu tun. Der grundlegende begriffliche Ansatz besteht in der Konzeption statistischer Variablen der Form

$$X : \Omega \longrightarrow \tilde{\mathcal{X}}$$

Hierbei verweist Ω auf die Gesamtheit der Objekte, auf die man sich beziehen möchte, und die statistische Variable X ordnet jedem Element $\omega \in \Omega$ einen Merkmalswert $X(\omega)$ in einem Merkmalsraum $\tilde{\mathcal{X}}$ zu. Ziel ist es, Aussagen über die statistische Verteilung von X, d. h. über die Häufigkeitsverteilung der Merkmalswerte aus $\tilde{\mathcal{X}}$ in der Gesamtheit Ω zu machen. Alle weiteren statistischen Begriffsbildungen knüpfen an einer solchen Konzeption statistischer Variablen an, wobei natürlich auch mehrdimensionale Variablen betrachtet werden können, wodurch Fragen nach gemeinsamen und bedingten Häufigkeitsverteilungen entstehen.[17]

5. Eine statistische Methodenlehre, die von einer solchen Konzeption statistischer Variablen ausgeht, findet man in unseren „Grundzügen der sozialwissenschaftlichen Statistik“ (Rohwer und Pötter 2001). Der konzeptionelle Ansatz zeigt auch, wo ein statistisches Inferenzproblem auftreten kann. Es tritt auf, wenn man die Werte einer statistischen Variablen nicht (oder nicht hinreichend genau) für alle Mitglieder der Gesamtheit Ω kennt, für die die Variable definiert ist. Das ist in der Sozialstatistik typischerweise dann der Fall, wenn sich die verfügbaren Daten nur auf eine Teilmenge (Stichprobe) der Mitglieder von Ω beziehen. Man kann dann über die statistischen Verteilungen der Variablen in der Gesamtheit Ω keine definitiven Aussagen machen, sondern nur Hypothesen formulieren; und es stellt sich die Frage, wie die Wahrscheinlichkeit solcher Hypothesen mit den verfügbaren Daten einschätzbar gemacht werden kann. — In diesem

[17] Der hier skizzierte Begriff statistischer Variablen kann generell als Ausgangspunkt aller statistischen Begriffsbildungen, nicht nur für die Sozialstatistik im engeren Sinne, angesehen werden. Unterschiede ergeben sich durch die Art der Objektmengen, auf die man sich beziehen möchte; daß man sich aber überhaupt auf Objektmengen bezieht, gilt für alle Anwendungen der Statistik. M. Kendall und A. Stuart beginnen ihre „Advanced Theory of Statistics“ (1977, I, S. 1) mit folgenden Worten: „The fundamental notion in statistical theory is that of the group or aggregate, a concept for which statisticians use a special word – ‘population’. This term will be generally employed to denote any collection of objects under consideration, whether animate or inanimate; for example, we shall consider populations of men, of plants, of mistakes in reading a scale, of barometric heights on different days, and even populations of ideas, such as that of the possible ways in which a hand of cards might be dealt. The notion common to all these things is that of aggregation. The science of Statistics deals with the properties of populations.“ In diesem Zitat deutet sich auch bereits an, daß der Begriff einer statistischen Gesamtheit nicht nur im Sinne einer real existierenden definiten Gesamtheit verwendet wird. Einige der daraus resultierenden Unklarheiten und Probleme werden in Kap. 6 genauer besprochen.

Kontext kann man von einem *sozialstatistischen Inferenzproblem* sprechen. Wesentlich ist, daß man es in diesem Fall mit *definiten* Hypothesen zu tun hat, die sich auf Merkmalsverteilungen in real existierenden Gesamtheiten beziehen. Oder anders formuliert: Die Hypothesen beziehen sich in diesem Fall auf *Sachverhalte*, die der Hypothesenbildung vorausgesetzt werden können.

6. Dieses sozialstatistische Inferenzproblem setzt als Kontext eine deskriptiv konzipierte Sozialstatistik voraus und wird uns deshalb im Rahmen dieser Arbeit nicht näher beschäftigen. Soweit gelegentlich darauf Bezug genommen wird, dient das nur zu einer Abgrenzung von Fragestellungen einer theoretisch orientierten Sozialforschung – vorläufig sprechen wir von „theoretischer Sozialstatistik“ –, die von grundsätzlich anderer Art sind. In der deskriptiven Sozialstatistik und bei dem aus ihrer Perspektive konzipierten Inferenzproblem geht es darum, wie Sachverhalte beschaffen sind (wobei es sich bei den Sachverhalten typischerweise um statistische Merkmalsverteilungen oder daraus ableitbare Größen handelt). Wie diese Sachverhalte zustande gekommen sind, spielt dabei keine Rolle. Theoretische Sozialstatistik beginnt dagegen mit *Fragestellungen, die sich auf das Zustandekommen und die Entwicklung sozialer Sachverhalte richten.* Man möchte Einsichten in die Prozesse gewinnen, durch die sich soziale Sachverhalte bilden und verändern. Darauf beziehen sich auch, so läßt sich jedenfalls vermuten, die „hypothetischen Gesetzmäßigkeiten“, die im Selbstverständnis der gegenwärtig betriebenen empirischen Sozialforschung eine so große Rolle spielen.

7. Um den Unterschied in der Art der Fragestellungen zu verdeutlichen, kann der Begriff eines „datenerzeugenden Prozesses“ dienen, der in der statistischen Literatur oft verwendet wird. Bemerkenswert ist die Zweideutigkeit dieses Begriffs. Einerseits kann er sich auf Prozesse beziehen, durch die man Informationen über in unserer Erfahrungswelt gegebene Sachverhalte gewinnen kann. Der Begriff bezieht sich dann darauf, wie die *Daten* – nicht jedoch die Sachverhalte, auf die sich die Daten beziehen – zustande kommen. Andererseits kann man sich mit dem Begriff darauf beziehen, wie die *Sachverhalte* (Situationen, Ereignisse, ...) entstehen, über die in Form von Daten mehr oder weniger viele Informationen verfügbar sind. Das ist offenbar ein wichtiger Unterschied, der auch terminologisch fixiert werden sollte. Wir werden deshalb das Wort ‘datenerzeugender Prozeß’ nur in der ersten der beiden Bedeutungen verwenden. Das Wort verweist dann auf Prozesse, durch die *Daten* zustande kommen, und setzt mithin voraus, daß Sachverhalte, auf die sich die Daten beziehen, in unserer Erfahrungswelt gegeben sind. In dieser Bedeutung sind datenerzeugende Prozesse für ein Verständnis des sozialstatistischen Inferenzproblems wichtig. Man muß wissen, wie Daten zustande gekommen sind, um Aussagen über die Sachverhalte machen zu können, auf die sich die Daten beziehen.

8. Eine nützliche Einteilung *daten*erzeugender Prozesse, auf die wir uns später gelegentlich beziehen werden, wurde von D. R. Cox und E. J. Snell (1981) vorgeschlagen:

„While the same technique of analysis, e.g. regression analysis, may be used in numerically identical form for any one of the main types of study, the limitations on scientific interpretation are quite different in the different types. It is helpful to distinguish between the following:

(i) Experiments, in which the system under study is set up and controlled by the investigator. Typically, one of a number of alternative treatments is applied to each individual, or experimental unit, and responses are measured. [...]

(ii) Pure observational studies, in which data have been collected on individuals in some system, the investigator having had no control over the collection of the data, other than perhaps some role in checking the quality of the data.[18]

(iii) Sample surveys, in which a sample is drawn from a well-defined population by methods, usually involving randomization, under the investigator's control. Conclusions can be drawn with confidence about the descriptive properties of the population in question, but the interpretation of, for example, relationships between variables raises problems similar to (ii). [...]

(iv) Controlled prospective studies, in which a group of individuals, chosen by the investigator, have various explanatory variables measured and are then followed through time, often to see whether some particular event of significance (e.g. death) occurs. To the extent that all important explanatory variables can be measured, and of course this is never totally possible, these studies have some of the virtues of an experiment.

(v) Controlled retrospective studies, such as the epidemiologial investigation summarized in Example V, in which a characteristic response variable has been observed on individuals, and the history of those individuals is examined to isolate relevant explanatory variables." (Cox und Snell 1981, S. 10f.)

9. Die Einteilung von Cox und Snell bezieht sich auf unterschiedliche *daten*erzeugende Prozesse. Theoretische Sozialstatistik beginnt dagegen mit einer gedanklichen Bezugnahme auf Prozesse, durch die soziale Sachverhalte, Situationen oder Ereignisse zustande kommen. Solche Prozesse erzeugen keine Daten, sondern die Sachverhalte, auf die sich Daten beziehen können. Wir sprechen deshalb nicht von *daten*erzeugenden Prozessen. Es handelt sich vielmehr um „soziale Prozesse", durch die die sozialen Sachverhalte entstehen, auf die sich die Erkenntnisinteressen der Sozialstatistik richten.[19] Das Wort 'soziale Prozesse' hat allerdings keine klare Bedeutung. Es macht zwar darauf aufmerksam, daß es sich nicht um „datenerzeugende

[18] Diese Formulierung ist ersichtlich nicht sehr präzise. Es kann natürlich bestimmt werden, wie und welche Aspekte beobachtet werden sollen. Der wesentliche Unterschied zu Experimenten besteht darin, daß bei Beobachtungen kein Einfluß *auf das Zustandekommen* der zu beobachtenden Sachverhalte genommen wird.

[19] Auch wenn in der Literatur von *daten*erzeugenden Prozessen gesprochen wird, ist oft eigentlich gemeint, daß man sich auf die Prozesse beziehen möchte, durch die die Sach-

Prozesse" handelt; aber es verweist nicht auf Sachverhalte, die empirisch festgestellt werden könnten. Bestenfalls liefert das Wort einen Hinweis auf ein *theoretisches* Problem: Wie kann man sich explizierbare Vorstellungen darüber machen, wie soziale Sachverhalte zustande kommen?

10. Orientiert man sich an dieser Fragestellung, wird deutlich, daß eine einfache Antwort nicht gegeben werden kann. Vielmehr führt die Fragestellung unmittelbar zu konzeptionellen Fragen der Gesellschaftstheorie. Um so bemerkenswerter ist es jedoch, daß in der theoretischen Sozialstatistik Fragen der Gesellschaftstheorie fast immer ausgespart bleiben. *Stattdessen* wurden und werden Begriffsbildungen und Gedankengänge der Wahrscheinlichkeitsrechnung verwendet, um Fragen zu formulieren, die sich auf das Zustandekommen sozialer Sachverhalte beziehen. Der Grundgedanke der theoretischen Sozialstatistik, wie sie sich bisher entwickelt hat, besteht darin, soziale Sachverhalte so zu betrachten, *als ob* sie durch hypothetische Zufallsgeneratoren erzeugt würden. Soweit man von Theoriebildung sprechen kann, besteht sie darin, solche hypothetischen Zufallsgeneratoren zu konstruieren, um sie als ein Deutungsschema für soziale Prozesse zu verwenden, durch die soziale Sachverhalte entstehen.[20]

verhalte entstehen, über die dann mehr oder weniger viel Information in Form von Daten verfügbar ist. Als Beispiel kann auf eine Abhandlung von J. Marschak (1950) hingewiesen werden, in der erläutert wird, wie in der Ökonometrie von statistischen Modellen gesprochen wird: „Hypotheses about economic structure are also known as economic theories. They try to state relations that describe the behavior and environment of men and determine the values taken at any time by economic variables such as prices, output, and consumption of various goods and services, and the prices and amounts of various assets. [...] Also, economic variables as well as those of experimental science are, in principle, random (stochastic) variables: that is, their properties are described by probability distributions. In particular, the stochastic character of the observed data can often be ascribed to their dependence on stochastic nonobservable variables: such nonobservable variables are random 'errors' in the observation of single variables or random 'shocks' suffered by the relations connecting them. [...] Thus, economic data are generated by systems of relations that are, in general, stochastic, dynamic, and simultaneous." (Marschak 1950, S. 2f.) Allerdings bleibt eine Ambivalenz, auf die D. Freedman in einer Arbeit, die sich kritisch mit Anwendungen der Regressionsrechnung in den Sozialwissenschaften beschäftigt, so hingewiesen hat: „In social-science regression analysis [...] usually the idea is to fit a curve to the data, rather than figuring out the process which generated the data. As a matter of fact, investigators often talk about 'modeling the data'. This is almost perverse: surely the object is to model the phenomenon, and the data are interesting only because they contain information about that phenomenon." (Freedman 1985, S. 348)

[20] Einigen Statistikern ist dieses „als ob" durchaus bewußt. Z.B. schrieb O. Anderson (1961, S. 954f.): „Es unterliegt in der Tat keinem Zweifel, dass die moderne statistische Theorie sich auf einer Reihe von verschiedenen Fiktionen, verschiedenen 'Als Ob' aufbaut. [...] Solange die anzuwendenden statistischen Methoden 'stochastisch', d. h. wahrscheinlichkeits-theoretisch ausgerichtet sind, sind sie von gewissen 'Als Ob' kaum zu trennen, insbesondere dann, wenn sie einfach die Normalverteilung jener häufig gar nicht genau erfassbaren Ausgangsgesamtheiten ('populations') *postulieren*, aus denen die gegebenen Teilgesamtheiten 'zufällig' entstanden sein sollen. Eine der Hauptbeschäftigungen des modernen Statistikers besteht darin, einzelne Zahlen oder ganze Zahlenreihen,

11. Um diese besondere Variante einer ihrem Anspruch nach theoretischen Sozialstatistik zu bezeichnen, sprechen wir von *probabilistischer Sozialstatistik*. Dies erscheint auch deshalb sinnvoll, weil die Bezeichnung ‘theoretische (Sozial-) Statistik’ im Laufe der Zeit in unterschiedlichen Bedeutungen verwendet worden ist. Zum Beispiel unterschied G. v. Mayr zwischen einem theoretischen und einem praktischen Teil der Statistik:

„Den *theoretischen* Theil bilden in der Hauptsache die Untersuchungen, welche das Wissensgebiet der Statistik abgrenzen, dessen allgemeine Grundlagen bestimmen und die Methode und Technik darlegen. [...] Der *praktische* Theil der statistischen Wissenschaft umfaßt die Gesammtheit der *materiellen* wissenschaftlichen Errungenschaften auf dem Gebiete der Massenbeobachtung des Gesellschaftslebens.“ (v. Mayr 1895, S. 123)

Dementsprechend nannte v. Mayr den ersten Band seines Hauptwerks zur Statistik und Gesellschaftslehre „Theoretische Statistik“. Gerade G. v. Mayr ist jedoch nicht nur kein Anhänger, sondern eher ein Kritiker der Verwendung wahrscheinlichkeitstheoretischer Begriffsbildungen und Gedankengänge in der Sozialstatistik gewesen.[21] Ebenso gab ein anderer Kritiker der Verwendung wahrscheinlichkeitstheoretischer Überlegungen, H. Wolff, seinem Lehrbuch den Titel „Theoretische Statistik“ (1932). Dagegen bezieht sich die in dieser Arbeit verwendete Bezeichnung ‘probabilistische Sozialstatistik’ auf eine Variante der theoretischen Statistik, für die L. v. Bortkiewicz den Namen ‘Stochastik’ vorgeschlagen hat:

„Die an der Wahrscheinlichkeitstheorie orientierte, somit auf ‘das Gesetz der großen Zahlen’ sich gründende Betrachtung empirischer Vielheiten möge als *Stochastik* [...] bezeichnet werden. Die Stochastik ist nicht sowohl Wahrscheinlichkeitstheorie schlechthin, als vielmehr Wahrscheinlichkeitstheorie in ihrer Anwendung, sei es auf empirische Vielheiten überhaupt, sei es auf empirische Vielheiten einer bestimmten Art [wie in der Sozialstatistik].“ (v. Bortkiewicz 1917, S. 3)

Dadurch wird auch eine der Hauptfragen kenntlich, die in dieser Arbeit diskutiert werden sollen: welchen potentiellen Sinn wahrscheinlichkeitstheoretische Begriffsbildungen und Vorstellungen in der Sozialforschung haben können; oder anders formuliert: ob v. Bortkiewicz Recht hat, wenn er im Anschluß an das eben angeführte Zitat behauptet:

„... daß erst die Durchdringung der Statistik mit der stochastischen Auffassungsweise ihr nicht nur einen höheren theoretischen Wert, sondern auch eine größere praktische Bedeutung verleiht.“

die tatsächlich vorliegen, mit anderen Zahlen oder Zahlenreihen zu vergleichen, die sich gemäss gewissen vorgegebenen Theorien, Hypothesen oder Modellen (wie man sich jetzt in der Ökonometrie auszudrücken pflegt) ergeben *sollten*. Das Ziel besteht darin, festzustellen, ob die Abweichungen der beobachteten von den erwarteten Zahlen noch allein *‘dem Zufall’* zugeschrieben werden könnten oder ob der Unterschied bereits als hierfür zu gross erscheint. Man braucht dabei gar nicht an die Neyman-Pearson-Wald’sche Theorie der Hypothesenprüfung zu denken (die z.B. eine so grosse Autorität wie R. A. Fisher lange nicht in allen ihren Konsequenzen anerkennen will), denn jeder Vergleich von relativen Häufigkeiten, Durchschnitten und anderen Masszahlen, jede Anwendung der χ^2 Methode, jeder Versuch der Feststellung des Verteilungsgesetzes einer statistischen Variablen usw. usw. stellt uns vor dasselbe Problem.“ Wenn Anderson in diesen Ausführungen von Fiktionen spricht, sind Hypothesen gemeint, die sich auf Prozesse des Zustandekommens von Sachverhalten oder Ereignissen beziehen und bei denen es sich insofern um Fiktionen handelt, als sie selbst nicht empirisch geprüft werden können. Solche Fiktionen sind zwar metaphysisch, aber sie sollten nicht von vornherein als sinnlos abgetan werden. Jedenfalls sollten sie deutlich von einem gelegentlich geäußerten, aber belanglosen Vorwurf unterschieden werden, der sich darauf bezieht, daß statistische Aussagen auf Abstraktionen beruhen. Z.B. hat H. Wolff (1926, S. 129) dies so formuliert: „Alle statistischen Methoden der Beobachtung sind demnach abstraktiv; sie sind als abstraktive Methoden Fiktionen im Sinne der Vaihingerschen Fiktionentheorie.“ Das sollte hier erwähnt werden, weil sich auch Anderson auf Vaihingers „Philosophie des Als Ob“ beruft.

[21] Hier eine seiner Stellungnahmen: „Die Wahrscheinlichkeitsrechnung hat eine innerliche Berechtigung nur bei solchen Vorgängen des sozialen Lebens, welche einige Analogie mit der Wiederholung einer Beobachtung an demselben Objekt oder der Herausnahme einer Kugel aus einer selbstbegrenzten konstanten Menge verschiedenfarbiger Kugeln in gleichbleibender Zusammensetzung haben. Solche Analogien finden sich z.B. auf dem Gebiete der Geschlechtsvertheilung der Geborenen. Darüber hinaus gibt es aber zahlreiche und gerade die wichtigsten sozialen Vorgänge und Erscheinungen, bei welchen von einem derartigen unveränderlichen Beobachtungsgebiet keine Rede ist, bei denen vielmehr gerade der stetige Wandel der Massen das Charakteristische ist. Hier vermag die Wahrscheinlichkeitsrechnung überhaupt nicht einzusetzen.“ (v. Mayr 1895, S. 28f.)

1.3 Wahrscheinlichkeitsrechnung

1. Einen wichtigen Hintergrund für die eben angedeutete Konzeption einer probabilistischen Sozialstatistik bildet die Wahrscheinlichkeitsrechnung, die sich seit dem 17. Jahrhundert vornehmlich anhand einer Beschäftigung mit Glücksspielen entwickelt hat. Das erste größere Werk zur Wahrscheinlichkeitsrechnung stammt von dem Mathematiker Jakob Bernoulli (1654–1705).[22] Es trägt den Titel *Ars conjectandi* („Kunst der Vermutungen“) und wurde zuerst posthum im Jahr 1713 veröffentlicht. Das Buch beschäftigt sich fast ausschließlich mit Glücksspielen. Zwar ging es Bernoulli wie den anderen Autoren, die an der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung mitgewirkt haben, nicht in erster Linie um Glücksspiele, sondern sie waren an einer generell verwendbaren „Kunst der Vermutungen“ interessiert (vgl. Daston 1988). Ihre primäre Beschäftigung mit Glücksspielen verweist jedoch auf einen spezifischen konzeptionellen Ansatz: Gegenstand der Wahrscheinlichkeitsrechnung sind Zufallsgeneratoren, d. h. Verfahren, durch die in wiederholbarer Weise Ereignissse erzeugt werden können; und zwar, um als Gegenstand einer mathematischen Theoriebildung dienen zu können, *artifizielle* Verfahren, die man sich selbst konstruiert hat und deren Konstruktionsprinzipien infolgedessen bekannt sind.

[22] Einige biographische Angaben finden sich bei Johnson und Kotz (1997, S. 15ff.); über den historischen Kontext der Bernoulli’schen Arbeit informiert van der Wærden (1975).

Glücksspiele sind gewissermaßen prototypische Beispiele für solche Zufallsgeneratoren und werden auch bis heute zur Motivation von Begriffsbildungen und Gedankengängen der Wahrscheinlichkeitsrechnung verwendet.

2. Eine Diskussion der Grundbegriffe einer *aleatorischen*, d. h. an Zufallsgeneratoren orientierten Wahrscheinlichkeitsrechnung erfolgt in Kapitel 4. Nur eine vorläufige Erläuterung zum Begriff 'Zufallsgenerator' ist bereits an dieser Stelle zweckmäßig. Der Begriff bezieht sich auf ein unter gleichen Bedingungen wiederholbares *Verfahren*, mit dem im Prinzip beliebig viele Sachverhalte oder Ereignisse erzeugt werden könnten, die sich durch Elemente eines vorgegebenen Merkmalsraums charakterisieren lassen. Exemplarisch kann man an eine Urne denken, die mit vollständig symmetrischen Objekten (z.B. Kugeln) gefüllt ist, die sich nur durch ihre Farbe oder eine Nummer unterscheiden. Eine solche Urne kann folgendermaßen als ein Zufallsgenerator verwendet werden: Zunächst werden die Kugeln in der Urne gemischt, dann wird blind eine der Kugeln aus der Urne herausgezogen. Die Farbe oder Nummer der herausgezogenen Kugel gibt an, welches der möglichen Ereignisse eingetreten ist. Schließlich wird die Kugel wieder in die Urne hineingelegt, um gleiche Ausgangsbedingungen für eine erneute Verwendung des Zufallsgenerators herzustellen. An diesem Beispiel kann auch der aleatorische Wahrscheinlichkeitsbegriff erläutert werden. Enthält die Urne insgesamt n Kugeln und haben m dieser Kugeln die Farbe F, ist die aleatorische Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer Kugel mit der Farbe F gleich m/n. Entsprechend kann allen Arten von Ereignissen, die mit einem Zufallsgenerator erzeugt werden können, eine aleatorische Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden. Dies führt zum Begriff einer Wahrscheinlichkeitsverteilung: Eine Funktion, die jedem Typ von Ereignissen, die mit einem Zufallsgenerator erzeugt werden können, eine bestimmte aleatorische Wahrscheinlichkeit zuordnet. Somit kann ein Zufallsgenerator aus der Perspektive der Wahrscheinlichkeitsrechnung vollständig und hinreichend durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung charakterisiert werden.

3. Man kann sicherlich sagen, daß sich die Wahrscheinlichkeitsrechnung zunächst als eine Theorie der Zufallsgeneratoren entwickelt hat. Damit stellte sich jedoch ein Problem. Die Theorie war verständlich und einsehbar, soweit sie sich mit *artifiziellen* Zufallsgeneratoren beschäftigte, deren Wahrscheinlichkeitsverteilung aus einer Kenntnis ihrer Konstruktion begründbar ist. Damit war jedoch zugleich der mögliche Anwendungsbereich der Theorie im wesentlichen auf solche artifiziellen Zufallsgeneratoren beschränkt. Wie aber konnte begründet werden, daß es für die Theorie auch außerhalb dieses Bereichs sinnvolle Anwendungsmöglichkeiten gibt?

4. Jedenfalls einige der Autoren, die an der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung mitgewirkt haben, waren sich dieses Problems durchaus bewußt. Dies gilt insbesondere für J. Bernoulli. In seiner *Ars conjectandi* schrieb er:

„Wir sind also dahin gelangt, dass zur richtigen Bildung von Vermuthungen über irgend eine Sache nichts anderes zu thun erforderlich ist, als dass wir zuerst die Zahl dieser Fälle genau ermitteln und dann bestimmen, um wieviel die einen Fälle leichter als die anderen eintreten können. Und hier scheint uns gerade die Schwierigkeit zu liegen, da nur für die wenigsten Erscheinungen und fast nirgends anders als in Glücksspielen dies möglich ist; die Gücksspiele wurden aber von den ursprünglichen Erfindern, damit die Spieltheilnehmer gleiche Gewinnaussichten haben sollten, so eingerichtet, dass die Zahlen der Fälle, in welchen sich Gewinn oder Verlust ergeben muss, im voraus bestimmt und bekannt sind, und dass alle Fälle mit gleicher Leichtigkeit eintreten können. Bei den weitaus meisten andern Erscheinungen aber, welche von dem Walten der Natur oder von der Willkür der Menschen abhängen, ist dies keineswegs der Fall. So sind z.B. bei Würfeln die Zahlen der Fälle bekannt, denn es giebt für jeden einzelnen Würfel ebensoviele Fälle als er Flächen hat; alle diese Fälle sind auch gleich leicht möglich, da wegen der gleichen Gestalt aller Flächen und wegen des gleichmässig vertheilten Gewichtes des Würfels kein Grund dafür vorhanden ist, dass eine Würfelfläche leichter als eine andere fallen sollte, was der Fall sein würde, wenn die Würfelflächen verschiedene Gestalt besässen und ein Theil des Würfels aus schwererem Materiale angefertigt wäre als der andere Theil. So sind auch die Zahlen der Fälle für das Ziehen eines weissen oder eines schwarzen Steinchens aus einer Urne bekannt und können alle Steinchen auch gleich leicht gezogen werden, weil bekannt ist, wieviele Steinchen von jeder Art in der Urne vorhanden sind, und weil sich kein Grund angeben lässt, warum dieses oder jenes Steinchen leichter als irgend ein anderes gezogen werden sollte. Welcher Sterbliche könnte aber je die Anzahl der Krankheiten (d. i. ebensovieler Fälle), welche den menschlichen Körper an allen seinen Theilen und in jedem Alter befallen und den Tod herbeiführen können, ermitteln und angeben, um wieviel leichter diese als jene Krankheit, die Pest als die Wassersucht, die Wassersucht als Fieber den Menschen zugrunde richtet, um daraus eine Vermuthung über das Verhältniss von Leben und Sterben künftiger Geschlechter abzuleiten? Oder wer könnte die unzähligen Fälle von Veränderungen aufzählen, welchen die Luft täglich unterworfen ist, um daraus schon heute vermuthen zu wollen, welche Beschaffenheit sie nach einem Monate oder gar nach einem Jahre hat? [...] Da diese und ähnliche Dinge von ganz verborgenen Ursachen abhängen, welche überdies noch durch die unendliche Mannigfaltigkeit ihres Zusammenwirkens unsere Erkenntnis beständig täuschen, so würde es völlig sinnlos sein, auf diese Weise etwas erforschen zu wollen.

Aber ein anderer Weg steht uns hier offen, um das Gesuchte zu finden und das, was wir *a priori* nicht bestimmen können, wenigstens *a posteriori*, d. h. aus dem Erfolge, welcher bei ähnlichen Beispielen in zahlreichen Fällen beobachtet wurde, zu ermitteln.“ (Bernoulli 1713/1999, S. 246f.)

Die Unterscheidung ist deutlich. Wenn man sich mit Glücksspielen oder, allgemeiner, mit Zufallsgeneratoren beschäftigt, gewinnt man Kenntnisse über Wahrscheinlichkeiten aus Einsichten in ihre Konstruktion. Es handelt sich um ein Wissen *a priori* in dem Sinne, daß man es aus einer Untersuchung von Konstruktionsverfahren gewinnen kann und nicht darauf angewiesen ist, es aus Beobachtungen realisierter Spiele zu bilden.[23] Wenn es sich jedoch andererseits um Vorkommnisse handelt, „welche von dem Walten der Natur oder von der Willkür der Menschen abhängen", kann unser Wissen nur aus einer Beobachtung der Vorkommnisse selbst und – wenn möglich – der Prozesse, durch die sie entstehen, gewonnen werden. Zur Begründung von Erwartungen, die sich auf *mögliche* Vorkommnisse beziehen, kann man sich dann bestenfalls auf in der Vergangenheit gemachte Beobachtungen berufen und ggf. auf eine Kenntnis von Regeln für das Verhalten von Dingen und Akteuren. Und somit stellt sich die Frage, ob dafür eine Wahrscheinlichkeitstheorie nützlich sein kann, die ihre grundlegenden Begriffe und Vorstellungen aus einer Bezugnahme auf Zufallsgeneratoren gewinnt; insbesondere dann, wenn es sich um Erwartungen für mögliche Vorkommnisse handelt, die nicht durch Zufallsgeneratoren, sondern durch Interaktionsprozesse von Akteuren hervorgebracht werden.

5. Wenn es sich um Vorkommnisse handelt, die nicht durch artifizielle Zufallsgeneratoren entstehen, sondern die „von dem Walten der Natur oder von der Willkür der Menschen abhängen", läuft der Vorschlag Bernoullis darauf hinaus, ihre Wahrscheinlichkeiten durch empirisch ermittelbare Häufigkeiten zu schätzen. Die Idee ist: Man kann eine gewisse Anzahl von Situationen beobachten, in denen irgendein Merkmal auftreten oder nicht auftreten kann, dann die relativen Häufigkeiten bestimmen und sie als Schätzwerte für die unbekannten Wahrscheinlichkeiten verwenden. Zum Beispiel:

> „... wenn Jemand schon seit langen Jahren das Wetter beobachtet und sich angemerkt hat, wie oft es heiter oder regnerisch war, oder wenn Jemand zwei Spielern sehr oft zugeschaut und gesehen hat, wie oft dieser oder jener gewinnt, so kann er gerade dadurch das Verhältniss bestimmen, welches die Zahlen der Fälle, in denen dieselben Ereignisse unter den vorangegangenen gleichen Umständen auch nachher eintreten oder nicht eintreten können, wahrscheinlicher Weise zueinander haben." (Bernoulli 1713/1999, S. 248)

Bernoulli war sich durchaus bewußt, daß die Verwendung relativer Häufigkeiten, die aus einer gewissen Anzahl von Beobachtungen ermittelt worden sind, zur Schätzung unbekannter Wahrscheinlichkeiten einer Rechtfertigung bedarf. Nachdem er das Problem anhand einiger Beispiele erläutert hat, gehen seine Überlegungen so weiter:

> „Man muss vielmehr noch Weiteres in Betracht ziehen, woran vielleicht Niemand bisher auch nur gedacht hat. Es bleibt nämlich noch zu untersuchen, ob durch Vermehrung der Beobachtungen beständig auch die Wahrscheinlichkeit dafür wächst, dass die Zahl der günstigen zu der Zahl der ungünstigen Beobachtungen das wahre Verhältnis erreicht, und zwar in dem Maasse, dass diese Wahrscheinlichkeit schliesslich jeden beliebigen Grad der Gewissheit übertrifft, oder ob das Problem vielmehr, so zu sagen, seine Asymptote hat, d. h. ob ein bestimmter Grad der Gewissheit, das wahre Verhältnis der Fälle gefunden zu haben, vorhanden ist, welcher auch bei beliebiger Vermehrung der Beobachtungen niemals überschritten werden kann." (Bernoulli 1713/1999, S. 248f.)

[23] Man sollte darauf achten, daß mit der Charakterisierung 'a priori' hier nicht gemeint ist, daß es sich um ein Wissen „vor aller Erfahrung" handelt; vielmehr soll der Ausdruck in diesem Kontext darauf hinweisen, daß man dieses Wissen aus Einsichten in die Beschaffenheit bzw. Konstruktion eines Verfahrens gewinnt.

Bernoulli behauptet dann, daß die hier geforderte Begründung gerade durch sein „Gesetz der großen Zahlen" geliefert werde (mit der genauen Formulierung dieses „Gesetzes" beschäftigen wir uns in Abschnitt 4.5.3).

6. Die Überlegung erscheint sinnvoll, wenn es sich um wiederholbare Ereignisse handelt, die man sich als durch einen Zufallsgenerator erzeugt vorstellen kann. Auf dieser Voraussetzung beruht auch die Formulierung und Begründung des Bernoullischen „Gesetzes". Insbesondere drei Aspekte sind wichtig.

a) Nur durch die Voraussetzung eines Zufallsgenerators erhält man eine Explikation für einen quantitativ bestimmten (aleatorischen) Wahrscheinlichkeitsbegriff (im Unterschied zu relativen Häufigkeiten, die sich auf realisierte Merkmale in endlichen Gesamtheiten beziehen).

b) Die Voraussetzung ist insbesondere erforderlich, um annehmen zu können, daß es überhaupt eine numerisch bestimmte Wahrscheinlichkeit gibt. Denn ohne diese Annahme wäre ganz unverständlich, was mit Hilfe empirisch ermittelbarer relativer Häufigkeiten *geschätzt* werden soll.

c) Schließlich ist die Voraussetzung erforderlich, um die Situationen, auf deren Beobachtung sich die Schätzung gründen soll, als voneinander unabhängig annehmen zu können; denn auch diese Annahme ist für die Begründung des Bernoullischen „Gesetzes" wesentlich.

Wenn man sich auf einen Zufallsgenerator beziehen kann, sind diese Voraussetzungen erfüllt, auch dann, wenn man über die genaue Beschaffenheit des Zufallsgenerators nur mangelhafte Kenntnisse hat. Man denke zum Beispiel an eine Urne, die in einem uns unbekannten Verhältnis weiße und schwarze Kugeln enthält. Infolgedessen kann eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, die diese Urne, wenn sie als ein Zufallsgenerator verwendet wird, charakterisiert, nicht berechnet werden. Dennoch erscheint die Annahme sinnvoll, daß es ein ganz bestimmtes – wenn auch unbekanntes – Verhältnis der beiden Sorten von Kugeln in der Urne gibt. Aber wie ist es, „wenn jemand schon seit langen Jahren das Wetter beobachtet und sich angemerkt hat, wie oft es heiter oder regnerisch war"? Kann man sich das Zustandekommen von heiteren und regnerischen Tagen so vorstellen, wie man sich das Ziehen von weißen und schwarzen Kugeln aus einer Urne vorstellen kann?

7. Auf dieses Problem hat zuerst Leibniz in einem Brief an Bernoulli hingewiesen.[24] Bernoulli hat das Problem in seiner *Ars conjectandi* angesprochen, wo er sich mit einigen Einwänden gegen seinen Gedankengang auseinandersetzt:

„... will ich kurz die Einwände widerlegen, welche einige Gelehrte dagegen erhoben haben.

1. Zuerst machen sie den Einwurf, dass das Verhältnis zwischen den Steinchen [der Kugeln in einer Urne] von anderer Beschaffenheit sei als dasjenige zwischen den Krankheiten und den Luftveränderungen; die Zahl jener sei bestimmt, die Zahl dieser aber unbestimmt und unsicher.

Darauf antworte ich: Beide sind hinsichtlich unserer Erkenntniss gleich ungewiss und unbestimmt. Dass aber irgend ein Ding an sich und seiner Natur nach ungewiss und unbestimmt beschaffen sei, kann von uns ebenso wenig verstanden werden, als wir verstehen können, dass Gott etwas zugleich erschaffen und nicht erschaffen hat; denn alles was Gott geschaffen hat, hat er gerade dadurch, dass er es geschaffen hat, auch bestimmt.“ (Bernoulli 1713/1999, S. 250f.)

Offenbar soll dieses Argument die Annahme begründen, daß alles, was geschieht, gesetzmäßig bestimmten Erzeugungsprozessen unterliegt. Das ist zwar eine metaphysische Annahme, aber sie läßt es sinnvoll erscheinen, durch Beobachtungen der erzeugten Sachverhalte und Ereignisse Einsichten in Beschaffenheiten der sie erzeugenden Prozesse zu gewinnen.

8. Allerdings stellt sich die Frage, wie ein solcher Glaube mit Erfahrungen historischer Kontingenz vereinbart werden kann, insbesondere bei sozialen Sachverhalten, die – wie Bernoulli sich ausgedrückt hat – auch „von der Willkür der Menschen abhängen“. Es ist ja nicht nur erforderlich, daß man hinreichend viele Situationen beobachten kann, um relative Häufigkeiten zur Schätzung von Wahrscheinlichkeiten zu ermitteln; erforderlich ist außerdem die Annahme, daß sich alle Prozesse, durch die die Situationen entstehen, *durch den gleichen Zufallsgenerator* deuten lassen. Zu diesem Einwand heißt es:

„Drittens machen sie den Einwand, dass die Zahl der Krankheiten nicht beständig dieselbe sei, sondern dass täglich neue entstehen. Darauf entgegne ich: Dass sich im Laufe der Zeiten die Krankheiten vermehren können, leugne ich nicht, und sicherlich würde derjenige, welcher aus heutigen Beobachtungen auf antediluvianische Zeiten zurückschliessen wollte, gewaltig von der Wahrheit abirren. Daraus folgt aber nichts weiter als dass bisweilen neue Beobachtungen aufgestellt werden müssen; auch bei den Steinchen würden neue Beobachtungen nothwendig werden, wenn man annehmen müsste, dass ihre Anzahl in der Urne sich geändert hätte.“ (Bernoulli 1713/1999, S. 251)

Mit dieser Bemerkung wird gewissermaßen eine zweite Argumentationslinie aufgebaut. Sollte zunächst durch eine metaphysische Überlegung gerechtfertigt werden, daß sich die Erscheinungen unserer Erfahrungswelt

[24] Ein Teil dieses Briefes findet sich bei I. Schneider (1988, S. 59f.).

gesetzmäßig bestimmten Erzeugungsprozessen verdanken, wird jetzt eingeräumt, daß diese Erzeugungsprozesse selbst einem historischen Wandel unterliegen. Bernoullis Vorschlag, sich gelegentlich neue Daten zu verschaffen, um Eigenschaften der hypothetisch unterstellten Zufallsgeneratoren neu zu schätzen, liefert gewissermaßen eine pragmatische Ergänzung zum vorab betonten Glauben an Gesetzmäßigkeiten.[25]

9. Bernoullis Überlegungen sind vor allem deshalb interessant, weil in ihnen ein Spannungsverhältnis von zwei Gedankengängen zum Ausdruck kommt, das bis heute wirksam ist. Einerseits ein Glaube an „ewige Gesetze“, denen die Entwicklung allen Geschehens unterliegt (zu Bernoullis Zeiten prototypisch exemplifiziert an den Bewegungsvorgängen des Planetensystems und der Newtonschen Physik);[26] andererseits eine Orientierung an den kontingenten Entwicklungen einer von Akteuren hervorgebrachten Geschichte. Dementsprechend vermischen sich in der probabilistischen Sozialstatistik zwei unterschiedliche Problemstellungen. Einerseits die Frage, wie man sich theoretische Vorstellungen über die Prozesse machen kann, durch die sich gesellschaftliche Verhältnisse entwickeln, andererseits Fragen, die sich darauf richten, wie man Beobachtungen gesellschaftlicher Erscheinungen für pragmatisch brauchbare Prognosen nutzen kann.

10. Vergleichsweise leicht verständlich ist die pragmatische Orientierung, die auf Voraussagen und Erwartungsbildungen zielt. Man kann sie sich an vielen Beispielen aus dem praktischen Leben verdeutlichen. Es ist auch verständlich, daß statistische Daten für Erwartungsbildungen hilfreich sein können. Zum Beispiel kann eine statistische Erhebung Daten liefern, um einschätzbar zu machen, wie sich die in den Schulen zu erwartenden Schülerzahlen in einem gewissen Zeitraum entwickeln werden. Das in der Geschichte der Sozialstatistik zunächst wichtigste Beispiel betrifft die Konstruktion von Sterbetafeln, die von Lebensversicherungsgesellschaften für Erwartungsbildungen über Lebensdauern und Sterbefälle verwendet werden können. Erwartungsbildungen dieser Art erfordern keine Gesellschaftstheorie, sondern verdanken sich praktischer Kenntnisse sozialer Prozesse. Zum Beispiel benötigt ein Kaufmann keine Gesellschaftstheorie, um sich Erwartungen über die Anzahl der Kunden zu bilden, die vielleicht in sein Geschäft kommen werden. Die Ermittlung statistischer Daten darüber, wie es bisher gewesen ist, kann gleichwohl dazu dienen, Informationen, die für

[25] So hat wohl auch Leibniz die Angelegenheit betrachtet, als er in einem Brief an Bernoulli (1703) schreibt: „Wenn sich aber auch empirisch keine vollkommen richtige Schätzung erzielen läßt, wird die empirische Schätzung nichtsdestotrotz in der Praxis brauchbar und ausreichend sein.“ (Zitiert bei Schneider 1988, S. 60.)

[26] P. S. de Laplace (1749–1827), der für die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihrer Anwendungen besonders einflußreich geworden ist, schrieb in seinem *Essai philosophique sur les probabilités* (1814/1932, S. 3): „Die Regelmäßigkeit, welche uns die Astronomie in der Bewegung der Kometen zeigt, ist ohne Zweifel bei allen Erscheinungen vorhanden.“

Erwartungsbildungen eine Rolle spielen können, zugänglich, explizit überschaubar und einschätzbar zu machen.

11. Würde sich die Sozialstatistik darauf beschränken, Daten verfügbar zu machen, die für pragmatische Orientierungen nützlich sein können, könnte man sich wissenschaftstheoretische Überlegungen sparen. Sozialstatistik wäre dann ein Hilfsmittel für praktische Orientierungen und hätte im übrigen keinerlei gesellschaftstheoretische Implikationen oder Ansprüche. Tatsache ist jedoch, daß die Sozialstatistik in ihrer historischen Entwicklung – bis hin zur gegenwärtigen empirischen Sozialforschung – immer wieder auch mit sozialwissenschaftlichen Ansprüchen aufgetreten und zu einem Ausgangspunkt für gesellschaftstheoretische Spekulationen geworden ist. Es sind diese Ansprüche und Spekulationen, durch die wissenschaftstheoretische und ideologiekritische Überlegungen herausgefordert werden.

12. Ein Verständnis der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist hierfür wichtig, weil sie einige zentrale theoretische Vorstellungen der probabilistischen Sozialstatistik beeinflußt hat. Dies gilt insbesondere für die folgenreiche Annahme, daß man auf sinnvolle Weise von Wahrscheinlichkeiten für das Zustandekommen sozialer Sachverhalte und Ereignisse sprechen könne. Denn diese Annahme impliziert, wenn man dem Selbstverständnis der Wahrscheinlichkeitsrechnung folgt, daß soziale Sachverhalte und Ereignisse so betrachtet werden können, als ob sie durch Zufallsgeneratoren hervorgebracht werden.[27] Bernoulli hat diese Annahme durch eine metaphysische Überlegung zu rechtfertigen versucht: „alles was Gott geschaffen hat, hat er gerade dadurch, dass er es geschaffen hat, auch bestimmt.“ Gott, oder die Natur, hat gewissermaßen die Zufallsgeneratoren eingerichtet, durch die die Sachverhalte und Ereignisse in unserer Erfahrungswelt entstehen. Ganz ähnlich hat sich auch Abraham de Moivre (1667–1754) ausgedrückt, der wie Bernoulli eine maßgebliche Rolle in der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung gespielt hat:

„As, upon the Supposition of a certain determinate Law according to which any Event is to happen, we demonstrate that the Ratio of Happenings will continually approach to that Law, as the Experiments or Observations are multiplied: so, *conversely*, if from numberless Observations we find the Ratio of the Events to converge to a determinate quantity, as to the Ratio of P to Q; then we conclude that this Ratio expresses the determinate Law according to which the Event is to happen. For let that Law be expressed not by the Ratio $P : Q$, but by some other, as $R : S$; then would the Ratio of the Events converge to this last, not to the former: which contradicts our *Hypothesis*. And the like, or greater, Absurdity follows, if we should suppose the Event not to happen according to any Law, but in a manner altogether desultory and uncertain; for then the Events would converge to no fixt Ratio at all. Again, as it is thus demonstrable that there are, in the constitution of things, certain Laws according to which Events happen, it is no less evident from Observation, that those Laws serve to wise, useful and beneficent purposes; to preserve the stedfast Order of the Universe, to propagate the several Species and Beings, and furnish to the sentient Kind such degrees of happiness as are suited to their State.

But such Laws, as well as the original Design and Purpose of their Establishment, must all be *from without*; the *Inertia* of matter, and the nature of all created Beings, rendering it impossible that any thing should modify its own essence, or give to itself, or to any thing else, an original determination or propensity. And hence, if we blind no ourselves with metaphysical dust, we shall be led, by a short and obvious way, to the acknowledgment of the great *Maker* and *Governour* of all; *Himself all-wise, all-powerful* and *good*.“ (de Moivre 1756, S. 251f.)

[27] Dies entspricht auch dem traditionellen Verständnis der Denkvoraussetzungen für Anwendungen des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in der Sozialstatistik. Zahlreiche historische Bemerkungen darüber, wie sich dieses Verständnis von Wahrscheinlichkeit mit statistischen Fragen verbunden hat, finden sich bei John (1895).

13. Erst im 19. Jahrhundert sind indessen Begriffsbildungen und Gedankengänge der Wahrscheinlichkeitsrechnung verwendet worden, um eine bis dahin weitgehend deskriptiv orientierte Sozialstatistik explizit mit gesellschaftstheoretischen Spekulationen zu verknüpfen. Eine besonders wichtige Rolle spielte Adolph Quetelet (1796–1874), insbesondere sein Buch „Über den Menschen und die Entwicklung seiner Fähigkeiten, oder Versuch einer Physik der Gesellschaft“ (1835, dt. Übersetzung 1838). A. A. Tschuprow (1874–1926), ein wichtiger Mitbegründer der probabilistischen Sozialstatistik, hat Quetelets Bedeutung folgendermaßen gewürdigt:

„Die uns als eine beschreibende Wissenschaft von den Massenerscheinungen des menschlichen Lebens entgegentretende Statistik hat bekanntlich eine dreifache Wurzel in der Geschichte. Die Staatenbeschreibung der Sansovino, Botero u. a. hat ihr durch die Vermittlung der deutschen ‘Universitätsstatistik’ den Charakter einer beschreibenden Wissenschaft aufgeprägt und in dem Begriffe der Staatsmerkwürdigkeiten als des Gegenstandes ihrer beschreibenden Tätigkeit ihre formale Grundlage zugewiesen. Die politische Arithmetik hat den Begriff der Merkwürdigkeit nach längerer Opposition seitens der zum Geographischen neigenden Vertreter der Wissenschaft mit dem gegenwärtig allgemein anerkannten Inhalte ausgefüllt, indem sie das Zahlenmäßige in den Massenerscheinungen in dessen Gesetzmäßigkeit erkannte und in den Vordergrund der statistischen Betrachtung geschoben hat. Endlich hat die Wahrscheinlichkeitslehre der Vorstellung der in den Massenerscheinungen des menschlichen Lebens sich offenbarenden Gesetzmäßigkeit das theoretische Rückgrat verliehen und dem synthetischen Genie Quetelets gestattet, die Statistik als eine Physique sociale zu einem abgeschlossenen wissenschaftlichen System zu gestalten.“ (Tschuprow 1906, S. 647f.)

Ähnlich hat P. Lippert im „Handwörterbuch der Staatswissenschaften“ (1910) Quetelet folgendermaßen charakterisiert: „Gründer der modernen Sozialstatistik durch seine Definition der Statistik als der ‘Wissenschaft von den Gesetzen, die das menschliche Leben ordnen und beherrschen’.“ Erinnert man sich an das eingangs angeführte Zitat von Scheuch und Rüschemeyer, hat die „von der modernen Wissenschaftslehre ausgehende Soziologie“ offenbar das Erbe von Quetelet angetreten.

14. Allerdings ist nicht nur fragwürdig, ob es überhaupt eine konsistente und sinnvolle Formulierung für das Quetelet'sche Theorieprogramm gibt. Bemerkenswert ist vor allem, daß sich auch die statistische Sozialforschung, soweit ihr theoretische Erkenntnisinteressen zugrunde liegen, gar nicht konsequent an diesem Theorieprogramm orientiert; denn statistisch ermittelte Sachverhalte werden meistens bloß rhetorisch als „Gesetzmäßigkeiten“ bezeichnet, tatsächlich jedoch als Erscheinungsformen gesellschaftlicher Verhältnisse betrachtet, die selbst einer Interpretation und Erklärung bedürfen. Somit stellt sich eine doppelte Aufgabe. Einerseits die theoretischen Sackgassen zu untersuchen, in die Quetelets Theorieprogramm geführt hat; andererseits aber auch an die Erkenntnisinteressen anzuknüpfen, die darin zum Ausdruck kommen, daß man statistisch ermittelte Sachverhalte verstehen und erklären möchte. Wir werden folgendermaßen vorgehen. In Teil I beschäftigen wir uns mit Grundbegriffen der Wahrscheinlichkeitstheorie. Dabei unterscheiden wir epistemische Wahrscheinlichkeit, die sich im allgemeinen einer Quantifizierung entzieht, und eine aleatorisch konzipierte Wahrscheinlichkeitsrechnung, die von Zufallsgeneratoren ausgeht. Ziel dieser Überlegungen ist es, die begrifflichen Voraussetzungen zu gewinnen, um eine bloße Wahrscheinlichkeitsrhetorik zu vermeiden. In Teil II beschäftigen wir uns mit der Frage, wie sich die probabilistische Sozialstatistik historisch entwickelt und zum Selbstverständnis der statistischen Sozialforschung beigetragen hat.

Teil I

Wahrscheinlichkeitsbegriffe

Kapitel 2

Möglichkeiten und Hypothesen

Wie in der Einleitung gezeigt worden ist, kann man die historische Entwicklung, die zum gegenwärtig dominierenden Verständnis statistischer Methoden in der Sozialforschung geführt hat, nur verstehen, wenn man untersucht, wie sie durch eine Übernahme von Begriffsbildungen und Vorstellungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung geprägt worden ist. Um das erforderliche Hintergrundwissen zu gewinnen, ist es gleichwohl sinnvoll, nicht sogleich mit Begriffen der Wahrscheinlichkeits*rechnung* anzufangen. Denn wie schon der Name sagt, wird in der Wahrscheinlichkeitsrechnung *vorausgesetzt*, daß 'Wahrscheinlichkeit' als ein metrisierbarer Größenbegriff konzipiert werden kann. Ob und ggf. in welchen Kontexten eine solche Voraussetzung begründet werden kann, ist jedoch nicht selbstverständlich. Tatsächlich wird das Wort 'wahrscheinlich' zunächst außerhalb des engen Umkreises der Wahrscheinlichkeitsrechnung in *epistemischen* Kontexten verwendet, nämlich zur Qualifizierung von Vermutungen, ohne dafür vorauszusetzen, daß auch numerische Wahrscheinlichkeitsgrade angegeben werden können. In erster Näherung kann man sich an einem Begriffsverständnis orientieren, das I. Kant folgendermaßen formuliert hat:

> „Unter Wahrscheinlichkeit ist ein Fürwahrhalten aus unzureichenden Gründen zu verstehen, die aber zu den zureichenden ein größeres Verhältnis haben, als die Gründe des Gegenteils.“ (Kant 1800/1968, S. 512)

In diesem und im folgenden Kapitel wird versucht, ein etwas genaueres Verständnis epistemischer Wahrscheinlichkeitsaussagen zu gewinnen. Der Leitgedanke ist, daß mit solchen Aussagen angestrebt wird, die Gründe, die für oder gegen Hypothesen sprechen, einschätzbar zu machen. Ob und wie das gelingen kann, hängt natürlich von der Art der Hypothesen ab, auf die man sich beziehen möchte. In diesem Kapitel wird deshalb mit einer Diskussion unterschiedlicher Arten von Hypothesen begonnen. Im nächsten Kapitel schließen sich daran Überlegungen an, wie man sich mit Wahrscheinlichkeitsaussagen auf Hypothesen beziehen kann.

2.1 Reden über Möglichkeiten

1. Eine elementare Unterscheidung betrifft Tatsachen und Möglichkeiten. Gleichgültig, in welcher Situation man sich befindet, wenn man überhaupt in der Lage ist, auf die Situation zu achten, kann man stets auch mindestens einige Merkmale der Situation *als Tatsachen* feststellen. Angenommen, man ist Teilnehmer eines Seminars; dann kann man z.B. die in der gegebenen Situation anwesenden Personen zählen und dadurch ihre Anzahl feststellen sowie die Seminarsituation charakterisieren. Aber das Seminar soll in einer Woche noch einmal stattfinden. Die Teilnehmer an dem Seminar, das erst in einer Woche stattfinden wird, kann man heute noch nicht zählen. Es ist unbestimmt, wieviele Personen an dem Seminar, das in der nächsten Woche stattfinden soll, teilnehmen werden. Es ist möglich, daß die Anzahl der Teilnehmer gleich bleibt, aber auch, daß sie kleiner oder größer wird. Das sind Möglichkeiten, über die man heute bestenfalls Vermutungen anstellen kann. Nicht einmal ist sicher, daß das Seminar in einer Woche tatsächlich stattfinden wird. Immerhin ist angekündigt worden, daß es stattfinden soll. Insofern gibt es einen Grund für die Annahme, daß es tatsächlich stattfinden wird; und stattdessen könnte man auch sagen: Es ist wahrscheinlich, daß es in einer Woche wieder stattfinden wird.

2. Das Beispiel zeigt, daß man sich auf Möglichkeiten in der sprachlichen Form von Vermutungen beziehen kann. Das Wort 'Vermutung' soll zum Ausdruck bringen, daß man etwas nicht sicher oder nicht genau weiß, und es impliziert, daß sich eine Vermutung als falsch herausstellen kann. Daraus bezieht auch das Wort 'möglich' in diesem Zusammenhang seinen Sinn: es könnte anders sein.

3. Aber warum könnte irgendetwas anders sein – anders als man vermutet hat? Eine Möglichkeit ist unmittelbar einsichtig: Es kann an Wissen oder Fähigkeiten mangeln, so daß man infolgedessen keine zutreffenden Feststellungen machen, sondern nur Vermutungen äußern kann, die sich als falsch herausstellen können. Hierzu gehört auch, daß man Fehler machen kann. Es ist zum Beispiel möglich, daß man beim Zählen der Seminarteilnehmer einen Fehler gemacht hat und infolgedessen die ermittelte Anzahl nicht zutreffend ist. Bei dieser Betrachtungsweise wird vorausgesetzt, daß es einen bestimmten Sachverhalt gibt und das Problem nur darin besteht, daß man nicht oder nur mangelhaft in der Lage ist, den Sachverhalt in einer geeigneten sprachlichen Form festzustellen. Es wird z.B. angenommen, daß die Anzahl der Personen, die sich zu einem gewissen Zeitpunkt in einem Fußballstadion aufhalten, als eine Eigenschaft der Situation bestimmt ist; aber es könnte sein, daß man nicht in der Lage ist, diese Anzahl genau zu ermitteln.

4. Die eben angedeutete Betrachtungsweise erscheint sinnvoll, wenn und insoweit bestimmte Sachverhalte als gegeben angenommen werden können. Infolge dieser Annahme sind unzutreffende Vermutungen eine Folge oder ein Ausdruck mangelhaften Wissens oder, in gewisser Weise allgemeiner, mangelhafter Fähigkeiten (zur Wissensbildung), wozu auch gehört, daß man Fehler machen kann. Die Annahme impliziert, daß es zutreffende Feststellungen geben könnte. — Aber ist diese Annahme stets sinnvoll? Man denke noch einmal an das Seminar, das vielleicht, vermutlich, wahrscheinlich in der nächsten Woche stattfinden wird. Diesem Seminar entspricht noch kein in unserer Erfahrungswelt realisierter Sachverhalt, es existiert – wenn dieser Ausdruck hier überhaupt angewendet werden kann – nur als eine zukünftige Möglichkeit. Sicherlich kann man gleichwohl Vermutungen anstellen. Man kann vermuten, daß es stattfinden wird; und man kann auch weitergehende Vermutungen anstellen, z.B. über die Anzahl der Teilnehmer, das Thema, den Ablauf des Seminars. Diese Vermutungen beziehen sich aber nicht auf bereits realisierte Sachverhalte, sondern auf Vorstellungen, die man sich von einem zukünftigen Geschehen heute schon machen kann. Nehmen wir an, daß einige Vermutungen dieser Art angestellt worden sind. Sicherlich können sie sich als falsch erweisen. Es ist möglich, daß das Seminar nicht stattfindet, obwohl wir vermutet haben, daß es stattfinden wird. Wenn dann nach dem Grund gefragt wird, warum unsere Vermutung unzutreffend gewesen ist, gibt es zwei verschiedene Möglichkeiten, nach einer Antwort zu suchen.

5. Die erste Möglichkeit entspricht der oben skizzierten Auffassung: Man könnte sagen, daß unsere Vermutung falsch gewesen ist, weil wir – in der Situation, in der wir die Vermutung gebildet haben – nicht gewußt haben, daß das Seminar nicht stattfinden wird. Diese Betrachtungsweise erscheint sinnvoll, wenn und insoweit man hätte wissen können, daß das Seminar nicht stattfinden wird. So oder so, man sucht dann den Grund für die Falschheit einer Vermutung in einem Mangel an Wissen, das zur Formulierung der Vermutung zur Verfügung stand, oder in fehlerhaften Überlegungen bei der Verwendung des verfügbaren Wissens. Um auf diese Betrachtungsweise zu verweisen, kann man von einer *epistemischen Unbestimmtheit* sprechen. Die Unbestimmtheit – die sich darin äußert, daß sich eine Vermutung als falsch herausstellen kann – verdankt sich bei dieser Betrachtungsweise einem Mangel an Wissen oder Fähigkeiten zur Wissensbildung.

6. Der Frage, warum das Seminar nicht stattgefunden hat, obwohl vermutet worden ist, daß es stattfinden wird, kann indessen noch eine andere Bedeutung gegeben werden. Man kann sich einen Prozeß vorstellen, in dessen Ablauf darüber „entschieden“ wird, ob das Seminar stattfinden wird oder nicht; und man könnte fragen, wie dieser Prozeß abgelaufen ist und schließlich dazu geführt hat, daß das Seminar nicht stattgefunden hat.[1] Man bezieht dann das Reden von Gründen (oder Ursachen) nicht auf den epistemischen Prozeß, der zur Bildung einer Vermutung geführt hat, sondern auf einen Prozeß, von dem angenommen wird, daß von seinem Ablauf abhängt, ob und ggf. wie ein Ereignis – in diesem Beispiel das fragliche Seminar – realisiert wird. Man könnte dann vielleicht herausfinden, daß das Seminar nicht stattgefunden hat, weil der Seminarleiter tags zuvor krank geworden ist. Dann hätte man einen Grund gefunden, mit dem erklärt

[1] Wir setzen hier das Wort 'entschieden' in doppelte Anführungszeichen, weil es sich um einen metaphorischen Sprachgebrauch handelt. Es ist aber an dieser Stelle nicht erforderlich, sich ein genaues Bild solcher Prozesse zu machen, durch die mögliche Seminare real werden oder unrealisiert bleiben.

werden könnte, warum sich die Vermutung, daß das Seminar stattfinden wird, als falsch herausgestellt hat.

7. Aber welcher Art ist dieser Grund? Er bezieht sich auf ein Ereignis, das eingetreten ist, *nachdem* die Vermutung gebildet worden ist. Hätte man es voraussehen können? Vielleicht ja, vielleicht nein. Sicherlich treten oft Ereignisse ein, die man nicht vorausgesehen hat und bei denen die Annahme, daß man sie hätte voraussehen können, nicht begründbar erscheint. Diese Überlegung betrifft indessen zunächst wieder nur eine epistemische Unbestimmtheit: Es mangelt an Wissen, die Zukunft verläßlich vorauszusagen. Ein neuer Gesichtspunkt entsteht jedoch durch die Überlegung, daß Menschen – allgemeiner: Akteure – auf zukünftiges Geschehen Einfluß nehmen können. Angenommen, wir begeben uns in der nächsten Woche in den Raum, in dem das Seminar stattfinden soll, und stellen dort fest, daß der Seminarleiter nicht anwesend ist, weil er kurz zuvor erkrankt ist. Gleichwohl könnten wir vorschlagen, daß das Seminar trotzdem – wenn auch ohne Anwesenheit des Seminarleiters – stattfinden soll. Ob das Seminar tatsächlich stattfindet, hängt dann davon ab, ob der Vorschlag von den übrigen Seminarteilnehmern angenommen wird.

8. Das Beispiel kann verallgemeinert werden. In vielen Fällen hängt das, was geschehen wird, auch davon ab, wie sich Akteure verhalten, die am Geschehen beteiligt sind. Aus der Sicht dieser Akteure stellt sich dann nicht nur die Frage, was geschehen wird, sondern auch: was geschehen sollte und wie sie vielleicht Einfluß nehmen können. Tatsächlich lassen sich in den meisten praktischen Handlungssituationen beide Fragestellungen nicht klar unterscheiden.[2]

9. Aber auch ohne selbst eine Akteursperspektive einzunehmen, kann ein Unterschied festgestellt werden. Wenn an einer Situation Akteure beteiligt sind, hängt die Entwicklung der Situation auch davon ab, wie sich die Akteure verhalten werden. Akteure können jedoch Entscheidungen treffen; und insoweit ihre Entscheidungen erst im Verlauf einer Situation getroffen werden, ist auch über die Entwicklung der Situation „noch nicht entschieden" worden. Es erscheint deshalb sinnvoll, außer einer epistemischen Unbestimmtheit, die sich einem Mangel an Wissen verdankt, noch eine andere Art von Unbestimmtheit in Betracht zu ziehen, die daraus resultiert, daß Akteure Entscheidungen treffen und dadurch auf die Entwicklung einer Situation Einfluß nehmen können. Zur Unterscheidung von epistemischer Unbestimmtheit kann man von *ontologischer Unbestimmtheit* sprechen; denn in diesem Fall ist „noch nicht entschieden", wie die Situation sein wird, auf die sich eine Vermutung bezieht.

[2] In einigen Fällen, wenn man sich unmittelbar auf *eigene* Handlungsmöglichkeiten bezieht, erscheint sogar die Frage, was geschehen *wird*, überhaupt nicht sinnvoll. Zum Beispiel bin ich in der Lage, mit Hilfe meiner Hände und eines Bleistifts Sätze auf ein Stück Papier zu schreiben, also die entsprechenden Ereignisse hervorzubringen. Aber es erscheint nicht sinnvoll, mich jetzt zurückzulehnen und Vermutungen darüber anzustellen, welche Sätze meine Hände in den nächsten 5 Minuten zu Papier bringen werden.

10. Ob bzw. in welcher Weise eine Unterscheidung epistemischer und ontologischer Unbestimmtheit für die Reflexion von Vermutungen, die sich auf zukünftige Situationen beziehen, wichtig ist, ist eine schwierige Frage, und sie wird in der Literatur zur Wahrscheinlichkeitstheorie fast immer ausgeblendet. Vielmehr wird von der Annahme ausgegangen, daß die Situationen, auf die sich Vermutungen richten, als ontologisch *bestimmte* Situationen vorausgesetzt werden können und daß es infolgedessen nur eine epistemische Unbestimmtheit gibt, die in einem mangelhaften Wissen darüber besteht, wie die Situationen tatsächlich beschaffen sind.[3] In der weiteren Diskussion werden wir diese Annahme als eine Sinnvoraussetzung wahrscheinlichkeitstheoretischer Überlegungen zugrunde legen und nur gelegentlich auf daraus resultierende Sinngrenzen hinweisen.

2.2 Vermutungen und Hypothesen

1. Im allgemeinen Sprachgebrauch erscheint es nicht erforderlich, zwischen den Worten 'Vermutung' und 'Hypothese' zu unterscheiden. Man kann sie weitgehend synonym verwenden und ggf. durch zusätzliche Erläuterungen kenntlich machen, auf welche Art von Vermutungen oder Hypothesen man sich beziehen möchte und wie man dies tun möchte. Wir werden hier diesem allgemeinen Sprachgebrauch folgen und Hypothesen als Vermutungen auffassen. Durch einige ergänzende Bemerkungen soll jedoch unser Sprachgebrauch etwas präzisiert werden.

2. Wichtig ist vor allem: Wenn im folgenden von Hypothesen gesprochen wird, sind *explizit formulierte* Vermutungen gemeint. Diese Voraussetzung ist erforderlich, weil bei wahrscheinlichkeitstheoretischen Überlegungen Hypothesen *als Gegenstand* der Theoriebildung auftreten. Man redet in diesem Kontext nicht unmittelbar über unsere Erfahrungswelt, sondern *über Hypothesen*. Also muß explizit gemacht werden, worüber man sprechen will und wie man das tun möchte.

3. Wie Hypothesen gebildet und in welcher Weise Unterscheidungen vorgenommen werden, ist natürlich in gewissen Grenzen freigestellt. Denkt man z.B. an die möglichen Ergebnisse des Wurfs mit einem Würfel, könnte man

[3] Eine oft verwendete Formulierung für diese Sinnvoraussetzung wurde von Keynes in seinem *Treatise on Probability* (1921, S. 3) so ausgedrückt: „All propositions are true or false, but the knowledge we have of them depends on our circumstances." Ob eine solche Annahme ohne Einschränkungen auch für zukünftiges Geschehen sinnvoll ist, ist indessen seit Aristoteles' berühmter Diskussion „zukünftiger Kontingenz" fragwürdig. Das Gegenargument ist auch leicht einsehbar: Wenn heute noch nicht darüber „entschieden" ist, ob das Seminar in der nächsten Woche stattfinden wird oder nicht, kann die Aussage, daß es stattfinden wird, nicht bereits *heute* wahr oder falsch sein. Eine ausführliche Diskussion solcher Fragen findet man bei Cahn (1967).

zwei Hypothesen unterscheiden: daß eine gerade oder eine ungerade Augenzahl erscheint; aber natürlich sind auch zahlreiche andere Möglichkeiten der Hypothesenbildung vorstellbar. In Abschnitt 3.2 wird dies durch die Konzeption einer „Algebra für Hypothesen“ präzisiert. Zunächst soll nur festgehalten werden, daß für das Reden von Hypothesen stets vorausgesetzt werden soll, daß es ein System von Hypothesen gibt, das (normalerweise) aus mindestens zwei unterschiedlichen Hypothesen besteht.

4. Schließlich ist wichtig, daß deutlich gemacht wird, von welcher Art die Hypothesen sind, über die gesprochen werden soll. Wenn in der sozialwissenschaftlichen Methodenliteratur von Hypothesen gesprochen wird, sind meistens Vermutungen über „Zusammenhänge zwischen Variablen“ gemeint. Jedoch ist es nicht nur eine offene Frage, wie einem solchen Verständnis von Hypothesen ein nachvollziehbarer Sinn gegeben werden kann (mit dieser Frage beschäftigen wir uns in Kapitel 9); viele sinnvoll formulierbare Hypothesen haben mit „Zusammenhängen zwischen Variablen“ überhaupt nichts zu tun. Es ist also in jedem Fall wichtig, sich zu überlegen, *worauf* sich Hypothesen beziehen sollen und *was* mit ihnen vermutet werden soll.

2.3 Hypothesen über Sachverhalte

1. In vielen Fällen beziehen sich Hypothesen auf Sachverhalte. Zum Beispiel kann sich eine Hypothese auf die Anzahl der Teilnehmer an einem Seminar richten, das in der letzten Woche stattgefunden hat. Wenn man dabeigewesen wäre und die Anzahl der Teilnehmer festgestellt und sich gemerkt hätte, könnte man in der Form einer Feststellung sagen: Es waren soundso viele. Aber wenn man nicht dabeigewesen ist oder nicht darauf geachtet hätte, wieviele Teilnehmer anwesend waren, oder einfach vergessen hätte, wieviele es gewesen sind, dann könnte man bestenfalls eine Vermutung äußern.

2. Wenn sich Hypothesen auf Sachverhalte beziehen, kann man ein System von Hypothesen im allgemeinen so formulieren: Es könnte so oder so oder so ... (gewesen) sein. — Aber worüber redet man, wenn man Hypothesen über Sachverhalte formuliert? Die naheliegende Antwort, daß dann über den Sachverhalt geredet wird, auf den sich die Hypothese bezieht, hat offenbar einen Mangel. Denn die Hypothese könnte ja falsch sein, und dann hat es den Sachverhalt nicht wirklich, sondern nur in unserer Einbildung gegeben. Sollte man infolgedessen sagen, daß sich Hypothesen stets nur auf Einbildungen beziehen? Damit würde man jedoch eine wesentliche Intention preisgeben: daß man sich in vielen Fällen mit der Formulierung von Hypothesen darauf beziehen möchte, wie gewisse Aspekte unserer Erfahrungswelt tatsächlich beschaffen sind. Man möchte dann nicht über Einbildungen, sondern über Aspekte unserer Erfahrungswelt sprechen; und man ist nur deshalb gezwungen, dies in der sprachlichen Form von Vermutungen zu tun, weil das vorhandene Wissen nicht ausreicht, um Feststellungen treffen zu können.

3. Es gibt jedoch eine Möglichkeit, das angedeutete Dilemma zu vermeiden. Denken wir noch einmal an die Vermutung über die Anzahl der Teilnehmer des Seminars, das in der letzten Woche stattgefunden hat. Die Vermutung bezieht sich in diesem Fall auf eine Eigenschaft des Seminars. Daß das Seminar stattgefunden hat und daß es eine bestimmte Anzahl von Teilnehmern gegeben hat, wird für die Formulierung der Hypothese vorausgesetzt. Die Hypothese bezieht sich nicht darauf, ob das Seminar überhaupt stattgefunden hat, sondern auf die Anzahl der Teilnehmer. Man redet also in diesem Fall über eine Situation, von der bei der Formulierung der Hypothese angenommen wird, daß es sie tatsächlich gegeben hat. Fraglich sind nur gewisse Aspekte oder Eigenschaften der Situation – und darauf beziehen sich die Hypothesen.

4. Dieses Beispiel kann verwendet werden, um eine für Hypothesen über Sachverhalte geeignete allgemeine sprachliche Form zu finden. Solche Hypothesen beziehen sich auf Situationen, von denen angenommen und bei der Formulierung der Hypothesen vorausgesetzt wird, daß es sie in unserer Erfahrungswelt gibt oder gegeben hat. Fraglich sind jedoch bestimmte Aspekte oder Eigenschaften der Situation: Es könnte so oder so oder so (gewesen) sein. Oder anders formuliert: Fraglich ist, welche aus einer Reihe möglicher Kennzeichnungen für die Situation zutreffend ist. Eine Hypothese besteht bei dieser Betrachtungsweise in der Vermutung, daß für die Situation, auf die man sich bezieht, eine (durch die Hypothese formulierte) Kennzeichnung zutreffend ist. Diese Betrachtungsweise liefert auch eine sinnvolle Explikation für das Reden von Sachverhalten, nämlich: Ein Sachverhalt besteht in der *zutreffenden* Kennzeichnung einer Situation. Zum Beispiel: An dem Seminar haben soundso viele Personen teilgenommen. Dies ist eine Aussage über einen Sachverhalt. Es ist auch eine Aussage über eine Situation. Aber die Situation – das Seminar, auf das man sich bezieht – kann natürlich noch auf viele andere Weisen beschrieben werden. Insofern können Sachverhalte und Situationen nicht umstandslos identifiziert werden. Man kann aber sinnvoll davon sprechen, daß Sachverhalte in jeweils spezifischen Aspekten einer Situation bestehen.

5. Diese Überlegungen erlauben es, die sprachliche Form von Hypothesen über Sachverhalte auch symbolisch zu vergegenwärtigen. Es gibt zunächst eine Situation ω; durch sie wird angegeben, worauf sich die Hypothesen beziehen. Fraglich ist, welche aus einer Reihe möglicher Kennzeichnungen für die Situation zutrifft. Hypothesenbildung besteht also zunächst darin, eine Reihe möglicher Kennzeichnungen für die Situation ω zu fixieren. Im folgenden wird dafür die Formulierung

$$\tilde{\mathcal{K}} := \{\tilde{k}_1, \ldots, \tilde{k}_m\}$$

verwendet.[4] Jedes Element von $\tilde{\mathcal{K}}$ kann verwendet werden, um – in der Form einer Vermutung – die Situation ω zu charakterisieren. Jedem $\tilde{k} \in \tilde{\mathcal{K}}$ entspricht somit eine Vermutung

$$\langle \omega, \tilde{k} \rangle$$

mit der Bedeutung: Die Kennzeichnung von ω durch $\tilde{k}$ ist ein *möglicher* Sachverhalt; und es wäre tatsächlich ein Sachverhalt, wenn die Vermutung zutreffen würde. Auch wenn man nicht oder nicht genau weiß, ob ein Sachverhalt zutrifft, spricht man also nicht über beliebige Einbildungen, sondern über eine Situation, von der man weiß oder annimmt, daß es sie gibt oder gegeben hat.

6. Schließlich kann durch die Verwendung dieser Schreibweisen auch leicht ein System von Hypothesen angegeben werden. Man muß nur bei der Bildung von $\tilde{\mathcal{K}}$ darauf achten, daß sich die Kennzeichnungen der Situation ω durch die Elemente von $\tilde{\mathcal{K}}$ wechselseitig ausschließen. Ein System von Hypothesen kann dann durch die Menge

$$\mathcal{H} := \{ \langle \omega, \tilde{k} \rangle \,|\, \tilde{k} \in \tilde{\mathcal{K}} \}$$

angegeben werden. Mit dem Symbol $\mathcal{H}$ soll auch im weiteren stets auf ein System von Hypothesen verwiesen werden.

2.4 Situationen und Ereignisse

1. Bisher wurde das Wort ‘Sachverhalt’ verwendet, um eine Variante von Hypothesen – Hypothesen über Sachverhalte – zu erläutern. Sowohl in der Umgangssprache als auch in Texten zur Wahrscheinlichkeitstheorie wird dagegen oft von Ereignissen gesprochen. In der Literatur zur Wahrscheinlichkeitstheorie wird das Wort ‘Ereignis’ meistens in einer äußerst unspezifischen Weise verwendet, oft auch austauschbar mit dem Wort ‘Sachverhalt’.[5] In der Umgangssprache werden dagegen die Worte ‘Sachverhalt’ und ‘Ereignis’ in unterschiedlichen Bedeutungen verwendet. Mit dem Wort

[4]Das Zeichen ‘:=’ wird verwendet, um zum Ausdruck zu bringen, daß es sich um eine Definition handelt; der Ausdruck auf der linken Seite des Zeichens wird durch den Ausdruck auf der rechten Seite des Zeichens definiert.

[5]Hier ist ein Beispiel (Applebaum 1996, S. 43): „Suppose that you are going to buy a second-hand car. You find one that you like and after a brief inspection you convince yourself that it would have a high probability of being roadworthy. Being a cautious individual you then inspect the car again in the company of a friend, who is a skilled mechanic and who discovers a large number of major problems. Consequently, you decrease your personal probability of the car being roadworthy. In the above example we have seen an important general principle at work: namely, *Gain in information about an event leads to a change in its probability.*“ Folgt man der Umgangssprache, ist allerdings der Zustand eines Gebrauchtwagens kein Ereignis.

‘Sachverhalt’ wird auf Eigenschaften von Situationen (oder Objekten) verwiesen; mit dem Wort ‘Ereignis’ verbindet man dagegen meistens die Vorstellung eines „Geschehens“ oder eines „Vorkommnisses“.[6] Zum Beispiel, daß an unserem Seminar heute 15 Personen teilnehmen, ist ein Sachverhalt, der einen Aspekt der Seminarsituation fixiert; man würde in diesem Fall nicht von einem Ereignis sprechen. Andererseits kann man sagen, daß das Stattfinden des Seminars oder daß ein Teilnehmer sich zu Wort meldet oder den Raum verläßt Ereignisse sind.

2. Einige Aspekte des Redens von Ereignissen können jedoch auch mit der im vorangegangenen Abschnitt entwickelten sprachlichen Form für Hypothesen über Sachverhalte erfaßt werden. Denn in vielen Fällen erscheint die Vorstellung sinnvoll, daß Ereignisse *in Situationen* stattfinden; z.B. in einer Seminarsituation: Ein Teilnehmer meldet sich zu Wort oder ein anderer verläßt den Raum. Oder man unternimmt einen Spaziergang, und dann beginnt es zu regnen. Diese und ähnliche Beispiele legen es nahe, daß man Situationen sowohl durch Sachverhalte (Zustände) als auch durch Vorkommnisse (Ereignisse) charakterisieren kann und daß es sich um komplementäre Arten der Charakterisierung von Situationen handelt.[7]

3. Soweit dieses komplementäre Verständnis von Sachverhalten und Ereignissen sinnvoll erscheint, kann man das im vorangegangenen Abschnitt entwickelte Schema für Hypothesen über Sachverhalte auch zur Formulierung von Hypothesen über Ereignisse verwenden. Es ist nur erforderlich, die Kennzeichnungsmenge $\tilde{\mathcal{K}}$ als eine Menge von Beschreibungen möglicher Ereignisse zu konzipieren, die in einer Situation ω vorgefallen sein können und die mithin verwendet werden können, um Vermutungen über die Situation zum Ausdruck zu bringen. Wir werden deshalb im weiteren bei der Bezugnahme auf Hypothesen nicht unterscheiden, ob sich die Elemente von $\tilde{\mathcal{K}}$ auf mögliche Sachverhalte oder auf mögliche Ereignisse beziehen.

4. Das Reden von möglichen Ereignissen bedarf jedoch noch einer Erläuterung. Angenommen, man bezieht sich auf eine Situation ω und fixiert mit einer Kennzeichnungsmenge $\tilde{\mathcal{K}}$ mögliche Ereignisse, die in der Situation ω stattgefunden haben können. Man sollte sich klarmachen, daß es sich bei den Elementen von $\tilde{\mathcal{K}}$ selbst nicht um mögliche Ereignisse handelt, vielmehr um sprachliche Formulierungen, mit denen Ereignisse, die in der Situation ω aufgetreten sein könnten, charakterisiert werden sollen. Um auf die möglichen Ereignisse zu verweisen, muß dagegen auf Vorkommnisse in der Situation ω und mithin zunächst auf die Situation selbst Bezug genommen werden. Für die möglichen Ereignisse selbst verwenden wir deshalb die sprachliche Form $\langle \omega, \tilde{k} \rangle$, also unsere Sprachform für Hypothesen.

[6]Zu diesem Verständnis des Ereignisbegriffs vgl. man Hacker (1982).

[7]Zu dieser Komplementarität des Redens von Zuständen und Ereignissen vgl. man Galton (1984, insb. Kap. 2).

Als Hypothese verweist diese sprachliche Form auf ein mögliches Ereignis. Ist die Hypothese zutreffend, kann man von einem tatsächlich realisierten Ereignis sprechen. Insofern gibt es auch eine Parallele zum Reden von möglichen und realisierten Sachverhalten.

2.5 Vergangenheit und Zukunft

1. Bei den bisherigen Überlegungen zur Formulierung von Hypothesen sind wir davon ausgegangen, daß sich Hypothesen auf Situationen beziehen und daß angenommen werden kann, daß es diese Situationen in unserer Erfahrungswelt gibt oder gegeben hat. Somit konnte auch angenommen werden, daß diese Situationen in einer jeweils bestimmten Weise existiert haben oder existieren und daß man nur deshalb Hypothesen bilden muß, weil das Wissen über die Situationen unvollständig ist. Andererseits kann man sich mit Hypothesen auch auf zukünftiges Geschehen beziehen.

2. Ein wichtiger Unterschied ist unmittelbar einsichtig. Von gegenwärtigen oder vergangenen Situationen kann man sagen, daß es sie gibt oder gegeben hat. Beim Reden über zukünftiges Geschehen kann man sich dagegen nicht auf Situationen beziehen, die es bereits gibt oder gegeben hat. Dennoch kann man sich auch über zukünftiges Geschehen Gedanken machen. Man kann sich *Vorstellungen* bilden und sich wünschen oder glauben oder annehmen oder vermuten oder erwarten oder davon überzeugt sein, daß es so kommen wird, wie man es sich vorstellbar gemacht hat.[8]

3. An dieser Stelle erscheint es sinnvoll, zwei Reflexionsformen zu unterscheiden, in denen man sich auf zukünftiges Geschehen beziehen kann. Die eine Reflexionsform orientiert sich an Fragestellungen der Art: Was wird geschehen? Oder auch konditional: Angenommen, es ist eine Situation ω mit den Eigenschaften ... entstanden, wird dann auch eine Situation ω' mit den Eigenschaften ... entstehen? Wir nennen dies eine *prozessuale Reflexionsform* für zukünftiges Geschehen. Es ist einsichtig, daß man in dieser Reflexionsform auch über gegenwärtiges und vergangenes Geschehen nachdenken kann. Zwar sind gegenwärtige und vergangene Situationen bereits in jeweils bestimmter Weise real geworden und können nachträglich nicht mehr verändert werden. Trotzdem kann man in kontrafaktischen Reflexionsformen auch noch über vergangenes und gegenwärtiges Geschehen nachdenken; und solche kontrafaktischen Überlegungen spielen auch für das prozessuale Nachdenken über zukünftiges Geschehen (darüber, was

[8] Es sei indessen angemerkt, daß das Wort 'Vorstellungen' die Unterscheidung zwischen Vergangenheit und Zukunft, wie sie sich aus menschlicher Perspektive darstellt, nicht wirklich trifft. Denn auch über vergangene Situationen kann man sich heute bestenfalls noch Vorstellungen machen; und auch das, was gerade jetzt im Nebenzimmer vor sich geht, kann ich mir nur vorstellen.

vielleicht geschehen könnte) eine wichtige Rolle.[9]

4. Man kann sich indessen auch in einer nicht-prozessualen Reflexionsform auf zukünftiges Geschehen beziehen. Als Beispiel kann das Seminar dienen, das in der nächsten Woche stattfinden soll. Ob es stattfinden wird, kann man heute noch nicht sicher wissen, denn es ist „noch nicht entschieden“; insofern könnte man in einer prozessualen Reflexionsform darüber nachdenken, ob es stattfinden wird oder nicht; d. h. man kann über einen Prozeß nachdenken, in dessen Verlauf darüber „entschieden“ wird, ob das Seminar stattfinden wird oder nicht. Andererseits kann man vermuten, daß es stattfinden wird, und sich mit einer anderen Frage beschäftigen: wieviele Teilnehmer es beim Seminar in der nächsten Woche geben wird. Offenbar unterscheiden sich die beiden Fragestellungen. Im ersten Fall bezieht sich die Frage darauf, ob ein gewisses Ereignis in der nächsten Woche stattfinden wird. Im zweiten Fall wird vorausgesetzt, daß eine zukünftige Situation – in diesem Beispiel das Seminar – gegeben ist, daß man jedoch bestimmte Aspekte oder Eigenschaften der Situation nicht kennt und deshalb nur Vermutungen anstellen kann. Bei der Voraussetzung handelt es sich um eine Annahme, die der Bildung von Hypothesen vorausgesetzt wird. Natürlich entsteht durch diese Annahme nicht die zukünftige Situation, auf die sich die Hypothesen beziehen. Wenn für die Formulierung der Frage nach der Anzahl der Teilnehmer am Seminar, das in der nächsten Woche stattfinden soll, vorausgesetzt wird, daß das Seminar stattfinden wird, impliziert dies nicht, daß das Seminar in der nächsten Woche tatsächlich stattfinden wird. Das Seminar, das in der nächsten Woche *vielleicht* stattfinden wird, kann man sich heute nur in Form einer vorstellbaren Situation vergegenwärtigen. Der wichtige Punkt ist jedoch, daß man Hypothesen über zukünftiges Geschehen auch in einer sprachlichen Form bilden kann, bei der sich die Hypothesen auf zukünftige Situationen beziehen; und zwar so, daß in der sprachlichen Formulierung die ontologische Differenz zwischen Vergangenheit und Zukunft unsichtbar bleiben kann.

5. Die Unterscheidung zwischen prozessualen und nicht-prozessualen Reflexionsformen zukünftigen Geschehens ist hier wichtig, weil sich dementsprechend die sprachlichen Formulierungen für Hypothesen unterscheiden. Mit dem bisher für Hypothesen über Sachverhalte und Ereignisse entwickelten sprachlichen Schema können Vermutungen, die im Rahmen einer prozessualen Reflexionsform sinnvoll erscheinen, nicht angemessen formuliert werden. Es kann aber durchaus verwendet werden, um nicht-prozessuale Hypothesen auszudrücken. Es ist dafür nur erforderlich, sich die Situation ω, auf die sich die Hypothesen beziehen, als eine zukünftige Situation vorzustellen. Um bei unserem Beispiel zu bleiben, würde dann ω auf die Situation verweisen, die durch das Seminar entsteht, wenn es in der nächsten Woche stattfindet; und die Kennzeichnungsmenge $\tilde{\mathcal{K}}$ könnte

[9] Eine allgemeine Einführung in diese Reflexionsform findet sich bei Rescher (1996).

als eine Menge von Zahlen konzipiert werden, mit denen Hypothesen über die Anzahl der Teilnehmer formuliert werden können.

6. Wenn man sich mit den begrifflichen Hilfsmitteln der Wahrscheinlichkeitstheorie auf zukünftiges Geschehen bezieht, wird stets eine nicht-prozessuale Betrachtungsweise angenommen. (Dies entspricht der in Abschnitt 2.1 besprochenen „Bestimmtheitsannahme“ für Situationen.) Zugrunde liegt die Vorstellung, daß man sich auf Zukünftiges in der gleichen sprachlichen Form beziehen kann wie auf Gegenwärtiges und Vergangenes. Es gibt dann nur unterschiedliche Grade epistemischer Unbestimmtheit; oder etwas krasser formuliert: Aus dieser Sicht besteht der einzige für die Theoriebildung relevante Unterschied darin, daß man über die Zukunft meistens schlechter informiert ist als über die Vergangenheit.[10] Wir betonen diesen Punkt, weil die in der Literatur zur Wahrscheinlichkeitstheorie verwendete Rhetorik oft suggeriert, daß man sich mit dem Eintreten von Ereignissen beschäftigt; zum Beispiel wird von „Eintrittswahrscheinlichkeiten für Ereignisse“ gesprochen. Dementsprechend werden oft Formulierungen verwendet, die eine prozessuale Reflexionsform nahelegen. Sobald man jedoch die Begriffsbildungen genauer analysiert, stellt man fest, daß es sich um eine irreführende Rhetorik handelt.

7. Um das Argument zu verdeutlichen, kann ein Standardbeispiel aus der Wahrscheinlichkeitstheorie dienen: würfeln. Hat man einen Würfel, kann man ihn verwenden, um Ereignisse zu erzeugen. Ein solches Ereignis besteht darin: Jemand nimmt einen Würfel und wirft ihn und wartet dann, bis der Würfel in einer bestimmten Lage zur Ruhe gekommen ist. Von Ereignissen *dieser Art* wird jedoch in der Wahrscheinlichkeitstheorie gar nicht gesprochen. Wenn man sich dort auf die „möglichen Ereignisse“ bezieht, die beim Werfen eines Würfels auftreten können, meint man vielmehr unterschiedliche Kennzeichnungen einer Situation, die – durch das Werfen des Würfels – erzeugt worden ist oder erzeugt werden kann. Man bezieht sich auf Hypothesen der Form $\langle\, \omega, \tilde{k}\, \rangle$, deren Formulierung bereits voraussetzt, daß es eine Situation ω gibt, sei es als eine reale oder als eine vorstellbare Situation. Ob und ggf. wie es in unserer Erfahrungswelt zu einer solchen Situation gekommen ist oder kommen wird, tritt als Fragestellung in der Wahrscheinlichkeitstheorie nicht auf.

[10] Zur Begründung wird manchmal auf physikalische Theorien verwiesen, in denen eine Unterscheidung zwischen Vergangenheit und Zukunft nicht vorkommt; vgl. zum Beispiel die Ausführungen von Smart (1963, Kap. 7). Daß eine solche Unterscheidung auch grundsätzlich nicht erforderlich sei, wird in der Philosophie seit einiger Zeit – durchaus kontrovers – unter der Überschrift „the new theory of time“ diskutiert; eine gute Einführung geben die Diskussionsbeiträge in Oaklander und Smith (1994).

2.6 Situationen und Situationstypen

1. In den bisherigen Überlegungen haben sich Hypothesen auf jeweils bestimmte Situationen bezogen, die sich in unserer Erfahrungswelt identifizieren lassen oder die man sich als bestimmte Situationen vorstellen kann. In den Sozialwissenschaften und insbesondere in ihren statistisch orientierten Varianten beziehen sich Hypothesen dagegen oft auf eine Mehrzahl von Situationen. Wie kann man das genauer verstehen?

2. Eine Möglichkeit besteht darin, eine Menge von Situationen zu vergegenwärtigen, deren Existenz durch Verweise auf unsere vergangene oder gegenwärtige Erfahrungswelt empirisch expliziert werden kann. Mengen dieser Art sind infolgedessen stets endlich, und man kann die Notation

$$\Omega := \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$$

verwenden, um auf eine solche Menge zu verweisen. Zum Beispiel kann es sich um die Gesamtheit der Statistik-Seminare handeln, die in einem bestimmten Zeitraum durchgeführt worden sind; oder um die Lebenssituationen einer Menge von Menschen, die in einem bestimmten Zeitraum arbeitslos geworden sind.

3. Andererseits erlaubt uns unsere Sprache, auch von *Situationstypen* zu sprechen; zum Beispiel von Situationen des Typs „Seminarsituation“, des Typs „Fußballspiel“, des Typs „Arbeitslosigkeit“ usw. Zur Notation wird im folgenden die Schreibweise

$$\omega \models \mathcal{S}$$

verwendet, womit gemeint sein soll, daß die Situation ω vom Typ $\mathcal{S}$ ist; oder anders formuliert: ω ist ein Beispiel für Situationen des Typs $\mathcal{S}$. Wichtig ist, daß zwar ω auf eine bestimmte (reale oder vorstellbare) Situation verweist, nicht jedoch $\mathcal{S}$. Situationstypen sind keine Situationen, sondern sprachliche Konstrukte, um Situationen als Beispiele eines Typs zu charakterisieren.

4. Situationstypen müssen auch von Mengen von Situationen unterschieden werden, und wir verwenden deshalb unterschiedliche Symbole. Das Symbol Ω wird verwendet, um auf eine jeweils bestimmte endliche Menge von Situationen zu verweisen.[11] Dagegen wird das Symbol $\mathcal{S}$ verwendet, um auf einen Situationstyp zu verweisen.

5. Die Konzeption von Situationstypen scheint nun noch eine andere Möglichkeit zu liefern, um sich auf eine Mehrzahl von Situationen zu beziehen,

[11] Oder auf eine bestimmte endliche Menge von Objekten. Bei der Definition statistischer Variablen wird Ω meistens als eine Menge von Objekten angesprochen. Die Sprechweise von Situationen ist jedoch grundlegender und allgemeiner. Denn auch wenn man sich in der Statistik auf Objekte bezieht, setzt ihre Charakterisierung durch Eigenschaften einen Kontext voraus, d. h. eine Situation, in der sich das Objekt befindet.

nämlich auf *alle Situationen eines Typs* $\mathcal{S}$. Zum Beispiel könnte man sagen: für alle Situationen des Typs „Fußballspiel“ gilt, daß es zwei Mannschaften und einen Ball gibt. Diese Aussage erscheint durchaus sinnvoll, aber es handelt sich nur scheinbar um eine Aussage über alle Fußballspiele. Vielmehr betrifft die Aussage unseren Sprachgebrauch. Sie sagt etwas über unser Verständnis des Wortes ‘Fußballspiel’. Findet man z.B. eine Situation, die in den meisten Aspekten als ein Fußballspiel erscheint, in der es jedoch zwei Bälle gibt, würde dadurch die Aussage, daß es in Fußballspielen nur einen Ball gibt, nicht falsch. Die Schlußfolgerung wäre vielmehr, daß es sich bei einer solchen Situation nicht um ein Fußballspiel im gewöhnlichen Sinn des Wortes handelt; aber vielleicht um eine Situation, die einem Fußballspiel sehr ähnlich ist.

6. Wie Aussagen über alle Situationen eines gewissen Typs formuliert werden können, die nicht nur darin bestehen, einen Sprachgebrauch zu fixieren, ist sehr unklar. Die Schwierigkeiten beginnen bereits bei der Suche nach einer verständlichen Sprachform. In der Literatur findet man oft Formulierungen, die unterstellen, daß sinnvoll von einer *Menge* (oder *Klasse*) aller Situationen eines Typs $\mathcal{S}$ gesprochen werden kann. Solchen Redeweisen kann aber keine empirisch explizierbare Bedeutung gegeben werden. Nicht nur gibt es – zum Beispiel – die Menge aller Fußballspiele nicht, man kann sich eine solche Menge auch nicht in irgendeiner bestimmten Weise vorstellen. Man denke zum Beispiel an die Frage: Gehören die Fußballspiele, die vielleicht in der Zukunft noch stattfinden werden, zu dieser Menge? Natürlich kann man sich *einige* Fußballspiele vorstellen, die in der Zukunft stattfinden werden. Aber was ist mit denjenigen, die man sich heute noch nicht vorstellen kann? Und in welcher Weise könnte man sagen, daß es alle in der Zukunft noch möglichen Fußballspiele schon heute als Mitglieder einer Menge aller Fußballspiele gibt?

7. In diesem Text wird deshalb die Vorstellung, daß Situationstypen als Mengen von Situationen aufgefaßt werden können, nicht verwendet. Dementsprechend wird auch nicht die Notation $\omega \in \mathcal{S}$, sondern $\omega \models \mathcal{S}$ verwendet, um zum Ausdruck zu bringen, daß die Situation ω ein Beispiel für den Situationstyp $\mathcal{S}$ ist oder sein soll. Wir unterscheiden also auch Mengen von Situationen eines Typs $\mathcal{S}$, wofür das Symbol Ω verwendet wird, von dem Situationstyp $\mathcal{S}$. Nur im Hinblick auf Ω kann sinnvoll von einer Menge (von Situationen oder Objekten) gesprochen werden, nicht jedoch im Hinblick auf $\mathcal{S}$.

2.7 Definite und indefinite Hypothesen

1. Die Bildung von Hypothesen kann sich zunächst auf eine bestimmte endliche Menge von Situationen $\Omega := \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$ beziehen. Die Schreibweise soll andeuten, daß die Menge Ω durch eine explizite Angabe ihrer

Elemente definiert wird. Wir sprechen dann von *definiten* Hypothesen, weil man in diesem Fall die Situationen, auf die sich die Hypothesen beziehen sollen, angeben kann. Insbesondere sind natürlich *singuläre* Hypothesen, die sich auf *eine* bestimmte Situation beziehen, auch definite Hypothesen.

2. Wenn es in der Menge Ω zwei oder mehr Situationen gibt, kann man zwei unterschiedliche Arten der Hypothesenbildung in Betracht ziehen. Einerseits kann man an Hypothesen denken, die sich als eine Konjunktion von singulären Hypothesen über die jeweils einzelnen Situationen in Ω formulieren lassen. Andererseits gibt es *statistische Hypothesen*, die sich nicht auf singuläre Hypothesen reduzieren lassen, sondern nur als Aussagen *über die Gesamtheit* der einzelnen Situationen verstanden werden können. Dennoch kann man auch in diesem Fall von definiten Hypothesen sprechen, weil bzw. wenn sie sich auf eine bestimmte Menge von Situationen beziehen.

3. Statistische Hypothesen beziehen sich auf Merkmalsverteilungen bei einer Menge von Situationen (oder Objekten). Zunächst werden statistische Variablen als Abbildungen

$$X : \Omega \longrightarrow \tilde{\mathcal{X}}$$

definiert, die jeder Situation $\omega \in \Omega$ einen Merkmalswert $X(\omega) \in \tilde{\mathcal{X}}$ zuordnen; $\tilde{\mathcal{X}}$ ist der Merkmalsraum der statistischen Variablen X. Für jede Merkmalsmenge $\tilde{X} \subseteq \tilde{\mathcal{X}}$ kann dann eine relative Häufigkeit definiert werden, die sich auf den Anteil von Situationen in Ω bezieht, die einen Merkmalswert in $\tilde{X}$ aufweisen. Die statistische oder auch Häufigkeitsverteilung der statistischen Variablen X ist dementsprechend eine Abbildung

$$\mathrm{P}[X] : \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{X}}) \longrightarrow \mathbf{R}$$

die jeder Merkmalsmenge $\tilde{X} \in \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{X}})$ ihre relative Häufigkeit $\mathrm{P}[X](\tilde{X})$ zuordnet.[12] In der elementaren Statistik wird gezeigt, daß $\mathrm{P}[X]$ eine additive Mengenfunktion ist, das heißt, für alle $\tilde{X}, \tilde{X}' \subseteq \tilde{\mathcal{X}}$ gilt:

a) $0 \leq \mathrm{P}[X](\tilde{X}) \leq 1$

b) $\mathrm{P}[X](\emptyset) = 0$, $\mathrm{P}[X](\tilde{\mathcal{X}}) = 1$

c) Wenn $\tilde{X} \cap \tilde{X}' = \emptyset$, dann: $\mathrm{P}[X](\tilde{X} \cup \tilde{X}') = \mathrm{P}[X](\tilde{X}) + \mathrm{P}[X](\tilde{X}')$

Ausführliche Erläuterungen zu diesen Begriffsbildungen und Schreibweisen findet man in unseren „Grundzügen der sozialwissenschaftlichen Statistik“.

4. In der sozialwissenschaftlichen Statistik handelt es sich zunächst immer um definite statistische Hypothesen; dann nämlich, wenn man deskriptives Wissen über in der sozialen Realität bestimmbare (und infolgedessen

[12] Mit dem Symbol $\mathcal{P}(\tilde{\mathcal{X}})$ soll auf die Potenzmenge von $\tilde{\mathcal{X}}$ verwiesen werden. Das Symbol $\mathbf{R}$ wird in diesem Text stets zur Bezeichnung der Menge der reellen Zahlen verwendet.

endliche) Gesamtheiten gewinnen möchte. Exemplarisch kann man daran denken, daß man Informationen über die Verdienstverhältnisse in einem Betrieb oder einer Branche oder Kenntnisse über die Dauer der Arbeitslosigkeit in einem gewissen Zeitraum gewinnen möchte; oder daß man sich dafür interessiert, wie sich die Berufsbildungsabschlüsse während eines gewissen Zeitraums verändert haben. Einem verbreiteten Verständnis zufolge geht es in den Sozialwissenschaften jedoch in erster Linie nicht um Fragestellungen dieser Art, sondern um *indefinite Hypothesen*, die wir vorläufig dadurch charakterisieren, daß sie sich auf „alle Situationen eines gewissen Typs“ beziehen (eine genauere Diskussion erfolgt in Kapitel 9). In der sozialwissenschaftlichen Methodenliteratur wird tatsächlich von vielen Autoren die Auffassung vertreten, daß solche indefiniten Hypothesen mit Begriffsbildungen der Statistik formuliert und mit statistischen Methoden begründet werden können.

5. Daß diese Auffassung fragwürdig ist, werden wir in späteren Kapiteln anhand zahlreicher Beispiele besprechen. Bereits an dieser Stelle kann jedoch darauf hingewiesen werden, daß bereits unklar ist, wie indefinite Hypothesen überhaupt formuliert und verständlich gemacht werden können. Denn worüber wird geredet, wenn – vorgeblich – „über alle Situationen eines gewissen Typs“ geredet wird? Eine Möglichkeit, solchen Redeweisen einen Sinn zu geben, besteht darin, sie zu reformulieren. Man könnte sagen: Man redet dann nicht über eine indefinite Menge von Situationen, sondern über Situationstypen. Als Sinnvoraussetzung wird dann unterstellt, daß eine Aussage über einen Situationstyp $\mathcal{S}$ auch für jede bestimmte Situation ω zutrifft, die als Beispiel für $\mathcal{S}$ vorstellbar gemacht werden kann. Dieses Verständnis steht jedoch im Widerspruch zum Sinn statistischer Aussagen. Denn statistische Aussagen beziehen sich in ihrer Bedeutung auf Gesamtheiten von Situationen oder Objekten und können nicht sinnvoll als Aussagen über einzelne Situationen oder Objekte – also insbesondere nicht über alle Situationen eines bestimmten Situationstyps – aufgefaßt werden. Die Unterscheidung ist wichtig, denn unsere Sprache ist zweideutig, wenn im Plural über als Individuen identifizierbare Objekte (irgendeiner Art) gesprochen wird. Mit Aussagen der Form „Für die Mitglieder einer Gesamtheit Ω gilt ...“ kann gemeint sein:

(1) Für jedes Mitglied aus Ω gilt ...; oder

(2) Für die Gesamtheit der Mitglieder aus Ω, also für Ω gilt ...

Statistische Aussagen, die vom Begriff einer statistischen Verteilung ausgehen, sind stets vom Typ (2), nicht vom Typ (1).

6. Versucht man, zunächst ganz unabhängig von statistischen Begriffsbildungen, Aussagen über einen Situationstyp als Aussagen über alle Situationen, die als Beispiele für den Situationstyp vorstellbar sind, aufzufassen, stellt sich natürlich die Frage, wie solche Aussagen begründet werden könnten. Eine Möglichkeit wurde bereits im vorangegangenen Abschnitt am Beispiel des Situationstyps „Fußballspiel“ erläutert. In diesem Fall handelte es sich jedoch um Aussagen über einen Sprachgebrauch, durch den das Verständnis eines Situationstyps fixiert werden soll. Daß die dadurch fixierten Eigenschaften eines Situationstyps auch allen Situationen zukommen, die als Beispiele des Situationstyps vorstellbar sind, ist dann kein empirischer Sachverhalt, sondern eine Implikation des (intendierten) Sprachgebrauchs. Oder anders formuliert: Eine Situation, die diese Eigenschaften nicht aufweist, ist dann *deshalb* kein Beispiel für den vorab fixierten Situationstyp. Offenbar gibt es hier eine Parallele zur Methode der Mathematiker, eine Menge vorstellbarer Gegenstände durch Konstruktionsverfahren einzuführen. Dennoch bleibt ein wesentlicher Unterschied. Durch die Fixierung von Eigenschaften für Situationstypen durch sprachliche Regeln wird zwar der durch $\omega \models \mathcal{S}$ symbolisierten Vorstellung, daß ω ein Beispiel für den Situationstyp $\mathcal{S}$ ist, ein bestimmter Sinn gegeben. Aber diese Regeln liefern uns keine Menge aller Situationen, die als Beispiele für $\mathcal{S}$ möglich sind. Insbesondere liefern sie kein Konstruktionsverfahren für alle möglichen Beispiele des Situationstyps $\mathcal{S}$, an das eine Begründung von All-Aussagen anschließen könnte.

Kapitel 3

Epistemische Wahrscheinlichkeit

Im vorangegangenen Kapitel wurde besprochen, wie man einige Aspekte des Redens über Möglichkeiten durch die Formulierung von Hypothesen explizit machen kann. Insbesondere haben wir uns mit Hypothesen beschäftigt, die sich darauf beziehen, wie Situationen durch Sachverhalte oder Ereignisse charakterisiert werden können. Da man sich bei Hypothesen dieser Art stets auf eine bestimmte Situation oder auf eine bestimmte endliche Menge von Situationen beziehen kann, wird von *definiten Hypothesen* gesprochen. In diesem Kapitel soll überlegt werden, wie man von einer Wahrscheinlichkeit definiter Hypothesen sprechen kann.

3.1 Bildung von Hypothesen

1. Es scheint ein Gemeinplatz zu sein, daß man sich im praktischen Leben fortwährend in Unsicherheitssituationen befindet. Tatsächlich wird jedoch dieser Aspekt selten zum Gegenstand expliziter Überlegungen. Meistens verläßt man sich auf Selbstverständlichkeiten und Gewohnheiten; und die Aussage, daß man sich gleichwohl – ohne es zu wissen? – in Unsicherheitssituationen befindet, erscheint insofern wenig sinnvoll. Es muß vielmehr in irgendeiner Form einen Anlaß geben, der eine *reflexive* Haltung motiviert, in der Möglichkeiten und Unsicherheiten einer Situation ins Blickfeld geraten. Erst dadurch wird es sinnvoll, davon zu sprechen, daß es in einer Situation Unsicherheit gibt.

2. Aber auch wenn diese Sinnvoraussetzung gegeben ist, kommt es selten zu einer expliziten Hypothesenbildung. Vielmehr erwägen wir unterschiedliche Vermutungen, die zum Beispiel in Kommunikationsprozessen ausgetauscht werden. Sicherlich begleiten solche Reflexionsprozesse auch unser praktisches Handeln; aber es ist ziemlich unklar, ob und ggf. wie man davon sprechen kann, daß sie unserem Handeln „zugrunde liegen". Glücklicherweise braucht diese Frage hier nicht diskutiert zu werden. Es genügt, darauf aufmerksam zu machen, daß auch die Reflexion von Vermutungen meistens weitgehend selbstverständlich und gewohnheitsmäßig abläuft. Hält man sich an den in Abschnitt 2.2 erläuterten Sprachgebrauch, kann man insoweit auch noch nicht von einer Hypothesenbildung sprechen. Hypothesenbildung setzt vielmehr voraus, daß Vermutungen *explizit* gemacht und zu einem *Gegenstand* des Nachdenkens und der Kommunikation gemacht werden.

3. Es ist also keineswegs selbstverständlich, Hypothesen zu bilden und über ihre Wahrscheinlichkeit nachzudenken. Man kann es vielleicht so sa-

gen: Eine explizite Formulierung von Hypothesen mit dem Ziel, ihre Wahrscheinlichkeit einschätzbar zu machen, ist nur erforderlich, wenn (a) der gewohnheitsmäßige und selbstverständliche Umgang mit Möglichkeiten und Unsicherheiten unzureichend erscheint – ein „Problem" entstanden ist –, und (b) wenn und insoweit es wichtig erscheint, nicht nur unterschiedliche Möglichkeiten zu bedenken und sich mehr oder weniger selbstverständlich von Plausibilitäten leiten zu lassen, sondern explizit Gründe zu finden, um Wahrscheinlichkeiten von Hypothesen einschätzbar zu machen.

4. Dafür gibt es hauptsächlich zwei Motive. Einerseits ein wissenschaftliches Erkenntnisinteresse, in dessen Verfolgung man sich nicht mit mehr oder weniger beliebigen Vermutungen zufriedengeben möchte. Andererseits praktische Interessen, die ein Motiv dafür liefern können, über die Folgen von Handlungsalternativen nachzudenken. Insoweit diese Folgen auch von Umständen abhängen, über die nur Vermutungen angestellt werden können, kann es sinnvoll erscheinen, explizit Hypothesen über Handlungsbedingungen und Handlungsfolgen zu bilden und durch Argumentationen einschätzbar zu machen.

5. Vermutungen, die bei wissenschaftlichen Gedankengängen oder beim Nachdenken über Handlungsmöglichkeiten wichtig erscheinen können, sind unterschiedlicher Art. Es sollte deshalb betont werden, daß wir uns hier zunächst nur mit einer bestimmten Sorte von Vermutungen beschäftigen, nämlich Vermutungen, die in der Form definiter Hypothesen formuliert werden können. Den Ausgangspunkt bildet die sprachliche Fixierung einer Situation, auf deren Beschaffenheit sich die Hypothesen beziehen.[1] Weiterhin erforderlich ist die Bildung einer Menge von Kennzeichnungen, die zur hypothetischen Charakterisierung der Situation verwendet werden können.

6. Wie eine Kennzeichnungsmenge gebildet werden kann, hängt davon ab, was man bereits über die Situation weiß, wozu auch ggf. vorhandenes Wissen darüber gehört, wie die Situation entstanden sein könnte oder wie sie entstehen könnte, wenn man an zukünftige Situationen denkt. Hypothesenbildung bezieht sich auf Aspekte einer Situation, die man nicht oder nicht genau kennt; aber bereits um sagen zu können, was man nicht oder nicht genau weiß, benötigt man einiges Wissen über die Beschaffenheit einer Situation. Ohne ein solches Wissen wäre es nicht einmal möglich, sich reflexiv auf eine Situation zu beziehen.

7. Es sollte auch betont werden, daß es im allgemeinen keinen unmittelbaren Zusammenhang zwischen Hypothesen und Entscheidungen gibt. Sicherlich kann die Bildung und Bewertung von Hypothesen im Rahmen von Entscheidungsprozessen eine Rolle spielen. Wenn es dagegen um wis-

[1] Stattdessen kann man sich auch auf eine bestimmte endliche Menge von Situationen beziehen und z.B. statistische Hypothesen formulieren. In diesem Kapitel wird zur Illustration stets auf singuläre Hypothesen Bezug genommen.

senschaftliche Hypothesen geht, ist es weder erforderlich noch sinnvoll, Entscheidungen zu treffen. Die Aufgabe besteht dann vielmehr darin, die Gründe darzulegen, die für bzw. gegen Hypothesen sprechen, um dadurch ihre Plausibilität einschätzbar zu machen. Dann endet ein Gedankengang vielleicht vorläufig damit, daß eine der in Betracht gezogenen Hypothesen am relativ wahrscheinlichsten erscheint. Aber es gibt dennoch keinen Grund, sie deshalb „für wahr zu halten“ oder „zu glauben“ oder sich „für sie zu entscheiden“. — Im übrigen ist es auch im praktischen Leben keineswegs immer sinnvoll, die relativ wahrscheinlichste Hypothese für zutreffend zu halten. Man denke noch einmal an das Seminar, das in der nächsten Woche wahrscheinlich stattfinden wird. Vielleicht hat man einen Grund für die Annahme, daß die Hypothese, daß das Seminar nicht stattfinden wird, etwas wahrscheinlicher ist als die entgegengesetzte Hypothese. Sollte man deshalb dem Seminar in der nächsten Woche fernbleiben? Das ist offenbar eine ganz andere Frage. Bei Entscheidungen geht es darum, *was getan werden sollte*. Bei der Einschätzung von Hypothesen geht es darum, wie reale oder vorstellbare Situationen durch Sachverhalte oder Ereignisse charakterisiert werden können. Zwischen beiden Arten von Fragestellungen gibt es keinen unmittelbaren Zusammenhang.[2]

3.2 Algebra für Hypothesen

1. Für die weiteren Überlegungen soll vorausgesetzt werden, daß man sich auf ein System definiter (singulärer) Hypothesen

$$\mathcal{H} := \{\, \langle \omega, \tilde{k} \rangle \,|\, \tilde{k} \in \tilde{\mathcal{K}} \,\}$$

beziehen kann. Die Elemente aus $\mathcal{H}$ werden *Elementarhypothesen* genannt, weil sich ihre Formulierung auf jeweils ein Element der Kennzeichnungsmenge $\tilde{\mathcal{K}}$ bezieht. Stattdessen kann man auch Hypothesen der Form

$$\langle \omega, \tilde{K} \rangle \tag{3.2.1}$$

betrachten, wobei $\tilde{K}$ eine beliebige Teilmenge von $\tilde{\mathcal{K}}$ ist. Eine solche Hypothese trifft dann zu, wenn sich die Situation durch irgendein Element $\tilde{k} \in \tilde{K}$ kennzeichnen läßt. Insbesondere kann man auch die Elementarhypothesen mit Hypothesen der Form $\langle \omega, \{\tilde{k}\} \rangle$ identifizieren, wobei $\tilde{k}$ ein Element der Kennzeichnungsmenge $\tilde{\mathcal{K}}$ ist.

2. Als Beispiel kann man an ein Würfelspiel denken und sich auf eine Kennzeichnungsmenge $\tilde{\mathcal{K}} := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ beziehen. Offenbar kann man

[2] Entsprechend hat sich auch I. Hacking (1965, S. 28) geäußert: „If one hypothesis is better supported than another, it would usually be, I believe, right to call it the more reasonable. But of course it need not be reasonable positively to believe the best supported hypothesis, nor the most reasonable one. Nor need it be reasonable to act as if one knew the best supported hypothesis were true.“

mit jeder Teilmenge von $\tilde{\mathcal{K}}$ eine Hypothese formulieren. Verwendet man z.B. die Teilmenge $\tilde{K} := \{1, 3, 5\}$, bedeutet die Hypothese $\langle \omega, \tilde{K} \rangle$, daß in der Situation ω eine ungerade Augenzahl realisiert wird.

3. In der Wahrscheinlichkeitstheorie ist es üblich, von vornherein anzunehmen, daß man sich stets auf eine Menge allgemeiner Hypothesen in der Form (3.2.1) beziehen kann. Ausgangspunkt ist die Vorstellung, daß man eine Menge von Teilmengen von $\tilde{\mathcal{K}}$, also ein Mengensystem $\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{K}}) \subseteq \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{K}})$ bilden kann, für das die folgenden Regeln gelten:[3]

a) $\tilde{\mathcal{K}} \in \mathcal{A}(\tilde{\mathcal{K}})$

b) $\tilde{K} \in \mathcal{A}(\tilde{\mathcal{K}}) \implies \tilde{K}^c \in \mathcal{A}(\tilde{\mathcal{K}})$

c) $\tilde{K}, \tilde{K}' \in \mathcal{A}(\tilde{\mathcal{K}}) \implies \tilde{K} \cup \tilde{K}' \in \mathcal{A}(\tilde{\mathcal{K}})$

Wenn diese Regeln gelten, wird $\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{K}})$ eine *Mengenalgebra* genannt. Insbesondere ist $\mathcal{P}(\tilde{\mathcal{K}})$ eine Mengenalgebra. Aber man kann auch gröbere Systeme bilden, zum Beispiel $\{\emptyset, \tilde{K}, \tilde{K}^c, \tilde{\mathcal{K}}\}$, wobei $\tilde{K}$ eine beliebige Teilmenge von $\tilde{\mathcal{K}}$ ist.

4. Ist $\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{K}})$ eine Mengenalgebra, wird

$$\mathcal{A}(\mathcal{H}) := \{\, \langle \omega, \tilde{K} \rangle \,|\, \tilde{K} \in \mathcal{A}(\tilde{\mathcal{K}}) \,\}$$

eine *Algebra für Hypothesen* genannt. Der Sinn dieser Begriffsbildung ergibt sich daraus, daß man von einer Parallele zwischen Mengenoperationen für Kennzeichnungsmengen und logischen Operationen für Hypothesen ausgehen kann. Insbesondere gibt es folgende Äquivalenzen. Erstens

$$\langle \omega, \tilde{K}^c \rangle \;\equiv\; \neg \langle \omega, \tilde{K} \rangle$$

wobei das Zeichen $\neg$ für die logische Negation steht. Zweitens

$$\langle \omega, \tilde{K} \cup \tilde{K}' \rangle \;\equiv\; \langle \omega, \tilde{K} \rangle \vee \langle \omega, \tilde{K}' \rangle$$

wobei das Zeichen $\vee$ die logische Oder-Verknüpfung bezeichnet. Und drittens

$$\langle \omega, \tilde{K} \cap \tilde{K}' \rangle \;\equiv\; \langle \omega, \tilde{K} \rangle \wedge \langle \omega, \tilde{K}' \rangle$$

wobei das Zeichen $\wedge$ die logische Und-Verknüpfung bezeichnet. Indem man diese Äquivalenzen ausnutzt, kann man mit Hilfe von logischen Operationen aus gegebenen Hypothesen neue Hypothesen bilden und für die Darstellung Schreibweisen aus der Mengenlehre verwenden.[4]

[3] Mit $\tilde{K}^c$ wird das Komplement von $\tilde{K}$ bzgl. $\tilde{\mathcal{K}}$ bezeichnet.

[4] Dieser Zusammenhang wurde zuerst von George Boole (1815 – 1864) systematisch untersucht, und man spricht deshalb auch von einer *Booleschen Algebra*. Eine auch unter historischen Gesichtspunkten interessante Einführung in seine Gedankenwelt vermitteln die von Grattan-Guinness und Bornet herausgegebenen Texte in Boole (1997).

3.3 Epistemische Wahrscheinlichkeit

1. Hypothesen können mehr oder weniger wahrscheinlich sein. Jedenfalls ist eine solche Redeweise aus der umgangssprachlichen Reflexion und Kommunikation von Vermutungen vertraut. Zum Beispiel kann man sagen: Sehr wahrscheinlich wird das Seminar in der nächsten Woche wieder stattfinden. Fragt man indessen, „wie groß“ die Wahrscheinlichkeit einer Hypothese ist, gerät man sofort in Schwierigkeiten.

2. In der Literatur zur Wahrscheinlichkeitsrechnung wird meistens davon ausgegangen, daß ‘Wahrscheinlichkeit’ als ein metrisierbarer Größenbegriff konzipiert werden kann, so daß „Grade der Wahrscheinlichkeit“ numerisch angegeben werden können. Es wird also angenommen, daß man eine Funktion

$$\mathrm{P_e}:\ \mathcal{A}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathbf{R}$$

konzipieren kann, mit der jeder Hypothese H aus einem System von Hypothesen $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ eine numerisch bestimmte epistemische Wahrscheinlichkeit $\mathrm{P_e}(H)$ zugeordnet werden kann. Ob und ggf. wie quantitative Wahrscheinlichkeitsmaße dieser Art begründet werden könnten, ist allerdings fragwürdig. Wir werden deshalb in dieser Arbeit die Auffassung vertreten, daß quantitative Wahrscheinlichkeitsaussagen nur unter sehr spezifischen Voraussetzungen möglich sind (wenn man sich auf Zufallsgeneratoren beziehen kann) und daß die Annahme eines quantitativen Wahrscheinlichkeitsmaßes deshalb nicht von vornherein und in allen Anwendungskontexten vorausgesetzt werden kann.[5] Stattdessen orientieren wir uns an einem *komparativen* Verständnis von Wahrscheinlichkeitsaussagen.[6] Die sprachliche Form besteht dann darin: daß eine Hypothese H „wahrscheinlicher als“ oder „nicht weniger wahrscheinlich als“ eine andere Hypothese H' ist.

3. Aber was ist mit Aussagen dieser Art gemeint? Man kann sich hier nicht auf einen wohldefinierten Wahrscheinlichkeitsbegriff berufen, da die Worte ‘wahrscheinlich’ und ‘Wahrscheinlichkeit’ in unterschiedlichen Kontexten

[5] Dies wird auch in der Literatur zur Wahrscheinlichkeitstheorie gelegentlich betont. Zum Beispiel heißt es bei Czuber (1908, S. 76): „Das tägliche Leben veranlaßt uns sehr häufig wenn auch nicht zu Wahrscheinlichkeitsbestimmungen, so doch zu Wahrscheinlichkeitsschätzungen. Wir urteilen über das Eintreffen oder Nichteintreffen eines Ereignisses auf Grund allgemeiner Erwägungen, bei denen wir uns durch erworbene Erfahrungen leiten, vielfach aber auch unseren Seelenzustand mit zu Worte kommen lassen; das Ergebnis wird nur ausnahmsweise eine numerische Wahrscheinlichkeit, sondern in der Regel lediglich eine allgemeine Aussage über die Größenbeziehung der Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen und das Nichteintreffen sein. Der subjektive Charakter eines so gewonnenen Resultates schließt einen erkenntnistheoretischen Wert desselben aus.“ Abgesehen von dem letzten Satz erscheint diese Bemerkung sehr plausibel.

[6] Dieses Verständnis wurde insbesondere von Keynes (1921) ausgearbeitet, dem wir insoweit folgen. Ein weiterer Autor, der ein komparatives Verständnis von Wahrscheinlichkeitsaussagen vorgeschlagen hat, ist Hacking (1965).

und mit unterschiedlichen Bedeutungen verwendet werden. Um dennoch einen Ausgangspunkt für weitere Überlegungen zu gewinnen, soll von folgendem Verständnis ausgegangen werden: Daß mit der Aussage „die Hypothese H' ist wahrscheinlicher als die Hypothese H“ gemeint ist, daß die Gründe, die für H' sprechen, besser sind als die Gründe, die für H sprechen. Wahrscheinlichkeitsaussagen haben es bei diesem Verständnis mit Gründen zu tun, die für oder gegen Hypothesen angeführt werden können.

4. Um Wahrscheinlichkeitsaussagen als komparative Aussagen zu formulieren, wird die Schreibweise

$$H \prec_e H'$$

verwendet, wenn gemeint ist, daß H' wahrscheinlicher ist als H; und die Schreibweise $H \preceq_e H'$, wenn gemeint ist, daß H' nicht weniger wahrscheinlich ist als H. Aussagen dieser Art werden *epistemische Wahrscheinlichkeitsaussagen* genannt; denn es handelt sich um Aussagen über Hypothesen, mit denen eine Bewertung von Gründen erfolgt, die für oder gegen die Hypothesen angeführt werden können.

5. Um ein Verständnis epistemischer Wahrscheinlichkeitsaussagen zu gewinnen, ist es wichtig, auf die sprachliche Form zu achten. Denn man kann das Wort ‘wahrscheinlich’ auf zwei unterschiedliche Weisen verwenden. Einerseits kann man es verwenden, um *modale* Aussagen zu formulieren. Die Verwendung des Wortes ‘wahrscheinlich’ für modale Aussagen wurde von A. R. White (1975, S. 59) so charakterisiert:

„For both the possibility that something should be so, that is, the possibility of ‘can’, and the possibility that something is so, that is, the possibility of ‘may’, circumstances may be such that *either* they exclude the possibility of something *or* they exclude the possibility of its opposite *or* they allow both its possibility and the possibility of its opposite. Where they exclude the possibility of something, they make it *impossible* – though the exclusion of the possibility of ‘may’ is usually expressed by ‘not possible’. Where, however, they exclude the possibility of something's opposite they make the thing itself either *necessary* or *certain*, depending [...] on whether the possibility that is excluded is the possibility that it should be so (‘can’) or the possibility that it is so (‘may’). *Probability* enters at this stage which is intermediate between the exclusion of the possibility of something and the exclusion of the possibility of its opposite, that is, the stage where there exist both the possibility of something and the possibility of its opposite. To say that something is ‘probable’, or ‘likely’, is to indicate the degree to which circumstances favour its being so in comparison with the existence of its possible alternatives.“

Unsere Sprache vermittelt uns zunächst ein solches modales Verständnis, bei dem sich Wahrscheinlichkeitsaussagen unmittelbar auf Möglichkeiten beziehen, die dem Geschehen in unserer Erfahrungswelt gewissermaßen innewohnen. Wenn das gemeint ist, sprechen wir von *modalen* Wahrscheinlichkeitsaussagen. Ihre Verwendung korrespondiert mit einer prozessualen

Reflexionsform für mögliche Abläufe in unserer Erfahrungswelt (vgl. Abschnitt 2.5).

6. Davon zu unterscheiden ist ein *epistemisches* Verständnis von Wahrscheinlichkeitsaussagen.[7] Bei epistemischen Wahrscheinlichkeitsaussagen sollte zunächst auf die sprachliche Form geachtet werden: Es sind *Aussagen über Hypothesen*; zum Beispiel: H' ist wahrscheinlicher als H. Im Unterschied zu modalen Wahrscheinlichkeitsaussagen sind epistemische Wahrscheinlichkeitsaussagen nicht unmittelbar Aussagen über unsere Erfahrungswelt, sondern Aussagen über die Wahrscheinlichkeit von Hypothesen. Eine Bezugnahme auf die Erfahrungswelt erfolgt nur indirekt durch die Hypothesen, durch die auf mögliche Sachverhalte oder Ereignisse Bezug genommen wird. Epistemische Wahrscheinlichkeitsaussagen dienen dann – gewissermaßen auf einer zweiten Stufe – dazu, diese Hypothesen durch einen Hinweis auf Gründe, die für oder gegen die Hypothesen sprechen, einschätzbar zu machen.[8]

7. Das Bemühen, Wahrscheinlichkeitstheorie auf der Ebene epistemischer Wahrscheinlichkeitsaussagen zu formulieren, kann man als einen Versuch verstehen, die Theoriebildung von den Schwierigkeiten, die mit modalen Sprech- und Denkweisen (bzw. prozessualen Reflexionsformen) verbunden sind, zu befreien. Es ist allerdings eine offene Frage, inwieweit ein solcher Versuch gelingen kann. Man sieht das schon daran, daß auch epistemische Wahrscheinlichkeitsaussagen meistens nur als Vermutungen formuliert werden können[9] und daß zu ihrer Begründung ein Rückgriff auf modale

[7] In der philosophischen Literatur wird eine solche Unterscheidung manchmal mit den Ausdrücken *'de re'* und *'de dicto'* angedeutet. Aussagen *de re* beziehen sich auf unsere Erfahrungswelt, Aussagen *de dicto* dagegen auf unser Reden über ... Verwendet man diese Ausdrücke, sind modale Wahrscheinlichkeitsaussagen *de re* und epistemische Wahrscheinlichkeitsaussagen *de dicto*. Wie von Hacking (1971) dargestellt worden ist, sind in der Geschichte der Wahrscheinlichkeitstheorie beide Aspekte oft vermischt worden.

[8] Wir betonen hier die Unterscheidung zwischen Aussagen über unsere Erfahrungswelt und Aussagen über Hypothesen, weil sich daraus – wie wir später noch genauer sehen werden – einige wichtige Implikationen für das Verständnis von Wahrscheinlichkeitsaussagen ergeben. Die Unterscheidung wendet sich zugleich gegen eine in der Literatur oft anzutreffende Neigung, gar nicht ernsthaft darüber nachzudenken, *worüber* Aussagen gemacht werden sollen. Exemplarisch sei auf Lenzen (1980, S. 81f.) hingewiesen: „Der durch '$X \leq_a Y$' zu symbolisierende Grundbegriff subjektiver Wahrscheinlichkeitstheorie beinhaltet, daß eine Person a das Ereignis X für höchstens so wahrscheinlich hält wie das Ereignis Y. Dabei interessiert den Wahrscheinlichkeitstheoretiker nicht, über welchen Gegenstandsbereich die Variablen $X, Y, \ldots$ laufen, d. h. welche Entitäten 'Ereignisse' sind. Je nach Kontext könnten Ereignisse als Mengen von Sachverhalten, von Zuständen, oder gar von 'möglichen Welten' interpretiert werden. Der Wahrscheinlichkeitstheoretiker abstrahiert von diesen möglichen Deutungen, indem er jede beliebige Menge als 'Ereignis' zuläßt." Daß bereits das Reden von einem „subjektiven" Wahrscheinlichkeitsbegriff fragwürdig ist, wird im nächsten Abschnitt besprochen.

[9] Infolgedessen ist es möglich, auch Wahrscheinlichkeitsaussagen als Hypothesen zu formulieren. Unabhängig davon, ob und ggf. wie dies geschieht, sollten jedoch Wahrscheinlichkeitsaussagen von denjenigen Hypothesen unterschieden werden, *über* die sie eine Aussage (Vermutung, Hypothese) formulieren.

Formulierungen im allgemeinen nicht vermieden werden kann. Dadurch bleiben auch epistemische Wahrscheinlichkeitsaussagen an ein elementares Verständnis von Modalitäten gebunden. Die Unterscheidung ist dennoch wichtig. Erst eine sprachliche Ablösung von modalen Wahrscheinlichkeitsaussagen, die sich unmittelbar auf unsere Erfahrungswelt beziehen, erlaubt es, Wahrscheinlichkeitsaussagen zum Gegenstand einer eigenständigen Theoriebildung zu machen, die sich nicht unmittelbar mit Aspekten unserer Erfahrungswelt, sondern mit epistemischen Wahrscheinlichkeitsaussagen beschäftigt.[10]

3.4 Abhängigkeit vom Wissensstand

1. Aussagen müssen von ihren Begründungen unterschieden werden. Mit einer epistemischen Wahrscheinlichkeitsaussage der Form $H \prec_e H'$ wird zum Ausdruck gebracht, daß die Hypothese H' wahrscheinlicher ist als die Hypothese H. Wissenswert wird eine solche Aussage aber nur dadurch, daß eine Begründung angegeben wird. In dieser Hinsicht unterscheiden sich Wahrscheinlichkeitsaussagen nicht von anderen Aussagen. (Wenn hier und im folgenden ohne Zusatz von Wahrscheinlichkeitsaussagen gesprochen wird, sind stets epistemische Wahrscheinlichkeitsaussagen gemeint.)

2. Will man eine Aussage der Form $H \prec_e H'$ begründen, muß man Gründe angeben, die sich auf die Hypothesen H und H' beziehen. Die Möglichkeit, solche Gründe angeben zu können, hängt wiederum von unserem Wissen über die Situation ab, auf die sich die Hypothesen beziehen. Denken wir an unser Seminarbeispiel. Unter normalen Umständen ist es viel wahrscheinlicher, daß das Seminar stattfinden wird, verglichen mit der Alternative, daß es ausfällt. Wenn man dann jedoch erfährt, daß der Seminarleiter erkrankt ist, erscheint es wahrscheinlicher, daß das Seminar ausfallen wird. — Die jeweils vorhandenen Möglichkeiten zur Formulierung und Begründung von Wahrscheinlichkeitsaussagen hängen also vom jeweils verfügbaren Wissen ab. So formuliert handelt es sich allerdings nicht um eine Besonderheit von Wahrscheinlichkeitsaussagen, sondern gilt generell für die Formulierbarkeit und Begründbarkeit von Aussagen aller Art. Bei epistemischen Wahrscheinlichkeitsaussagen gibt es jedoch eine Besonderheit, die daraus resultiert, daß es sich nicht unmittelbar um Aussagen

[10] Hier sollte darauf geachtet werden, daß man bei einer metasprachlichen Betrachtungsweise auch epistemische Wahrscheinlichkeitsaussagen „modal" nennen kann, etwa so wie in der folgenden Bemerkung von J. R. Lucas (1970, S. 4): „'Probably' is therefore a modal word. It affects not the content of what is said, but the way in which it is said, the force with which it is said, and the degree to which it is to be relied on." Dieses Verständnis von „modal" muß jedenfalls von einer Konzeption modaler Aussagen unterschieden werden, wie sie in den oben angeführten Bemerkungen von White zum Ausdruck kommt.

über unsere Erfahrungswelt handelt, sondern um Aussagen über Hypothesen. Die Aussage $H \prec_e H'$ *bedeutet*, daß es für H' bessere Gründe gibt als für H. In dieser Betrachtungsweise beziehen sich epistemische Wahrscheinlichkeitsaussagen *in ihrer Bedeutung* auf Begründungen und mithin auch auf das Wissen, das für Begründungen zur Verfügung steht. Man kann es vielleicht so sagen: Für gewöhnliche Aussagen (und auch für modale Wahrscheinlichkeitsaussagen) ist Wissen als eine Ressource für ihre Formulierung und Begründung erforderlich, aber der gemeinte Sinn läßt sich von ihrer Begründung unterscheiden; dagegen wird mit epistemischen Wahrscheinlichkeitsaussagen in komparativer Weise über Begründungen von Hypothesen gesprochen.

3. Daß epistemische Wahrscheinlichkeitsaussagen vom jeweils verfügbaren Wissen abhängig sind, hat einige Autoren veranlaßt, von „subjektiven" Wahrscheinlichkeitsaussagen bzw. von einem „subjektiven" Wahrscheinlichkeitsbegriff zu sprechen. Demgegenüber sollte zunächst nochmals betont werden, daß – in einem allgemeinen Sinn – eine Abhängigkeit von einem Wissensstand keine Besonderheit von Wahrscheinlichkeitsaussagen ist, sondern für alle Aussagen zutrifft. Infolgedessen liefert das Adjektiv ‘subjektiv’ keine sinnvolle Unterscheidung.

4. Wenn in der Literatur von einem „subjektiven" Wahrscheinlichkeitsbegriff gesprochen wird, ist indessen oft etwas anderes gemeint, nämlich eine Auffassung, die zum Beispiel von De Morgan (1838, S. 6f.) folgendermaßen zum Ausdruck gebracht wurde:

„The quantities which we propose to compare are the forces of the different impressions produced by different circumstances. The phraseology of mechanics is here extended: by force, we merely mean cause of action, considered with reference to its magnitude, so that it is more or less according as it produces greater or smaller effect. It is one of the most essential points of the subject to draw the distinction we now explain. Probability is the feeling of the mind, not the inherent property of a set of circumstances. It is frequently referred to external objects, as if it accompanied them independently of ourselves, in the same manner as we imagine colour, form, &c. to abide by them. Thus we hold it just to say, that a white ball may be shut up in a box, and whether we allow light to shine on it or not, it is still a white ball. And if we were to translate the common notion, we should also say that in a lottery of balls shut up in a box, each ball has its probability of being drawn inseparably connected with it, just as much as form, size, or colour. But this is evidently not the case: Two spectators, who stand by the drawner, may be very differently affected with the notion of likelihood in respect to any ball being drawn. Say that the question is, whether a red or a green ball shall be drawn, and suppose that A feels certain that all the balls are red, B, that all are green, while C knows nothing whatever about the matter. We have here, then, in reference to the drawing of a red ball, absolute certainty for or against, with absolute indifference, in three different persons, coming under different previous impressions. And thus we see that the real probabilities may be different to different persons."

Diese Passage ist interessant, weil sich in ihr eine richtige und eine fragwürdige Überlegung vermischen.

5. Es ist einsichtig, daß Wahrscheinlichkeiten nicht als Eigenschaften von Objekten oder Situationen verstanden werden können. Dies ist jedenfalls dann einsichtig, wenn man sich auf epistemische Wahrscheinlichkeitsaussagen bezieht.[11] In diesem Kontext kann man indessen Wahrscheinlichkeiten auch nicht als Eigenschaften von Hypothesen verstehen, denn bei der Formulierung epistemischer Wahrscheinlichkeitsaussagen dienen Formulierungen wie ‘ist wahrscheinlicher als’ vielmehr dazu, etwas über die Gründe zu sagen, die für oder gegen die Hypothesen, auf die sich die Aussage bezieht, angeführt werden können.

6. Aus der richtigen Einsicht, daß Wahrscheinlichkeiten keine Eigenschaften von Objekten oder Situationen sind, zieht De Morgan jedoch eine fragwürdige Schlußfolgerung: daß Wahrscheinlichkeit als ein „feeling of the mind" verstanden werden sollte. Diese Auffassung ist fragwürdig, weil sie weder dem Verständnis noch der Verwendung epistemischer Wahrscheinlichkeitsaussagen gerecht wird. Wenn wir eine Wahrscheinlichkeitsaussage formulieren, geben wir dadurch nicht einen Bericht über einen Gefühlszustand. Dies ist im allgemeinen weder der gemeinte Sinn einer Wahrscheinlichkeitsaussage, noch verhält es sich so, daß man Wahrscheinlichkeitsaussagen durch Hinweise auf Gefühle begründet. Weder redet man mit Wahrscheinlichkeitsaussagen über Gefühle (oder wie auch immer konzipierte „mentale Zustände"), noch können Hinweise auf Gefühle Begründungen liefern. Vielmehr muß man sich zur Begründung einer epistemischen Wahrscheinlichkeitsaussage auf die Hypothesen beziehen, die durch ein Wahrscheinlichkeitsurteil vergleichbar gemacht werden sollen. Es geht also um Gründe, die für oder gegen die Hypothesen angeführt werden können.

7. Daß solche Gründe nicht „objektiv festgestellt" werden können, ist allerdings selbstverständlich, denn Gründe gibt es nicht als wahrnehmbare Objekte oder Sachverhalte in unserer Erfahrungswelt. Wenn überhaupt, gibt es sie als Argumente im Kontext reflexiver und kommunikativer Begründungen von Behauptungen oder Vermutungen. Insofern ist es auch nicht ausgemacht, daß man bei der Formulierung epistemischer Wahrscheinlichkeitsaussagen stets eine gemeinsame Auffassung erzielen kann. Aber auch das ist keine Besonderheit von Wahrscheinlichkeitsaussagen.

8. Es sei angemerkt, daß nicht alle Autoren, die von einem „subjektiven" Wahrscheinlichkeitsbegriff sprechen, damit die Auffassung verbinden, daß Wahrscheinlichkeitsaussagen Aussagen über „mentale Zustände" sind. Allerdings werden oft Formulierungen verwendet, die ein Verständnis sehr

[11] Wir werden uns jedoch in Kapitel 4 mit einer Konzeption von Wahrscheinlichkeiten beschäftigen, die es in gewisser Weise erlaubt, sie zur Charakterisierung von Verfahren (Zufallsgeneratoren) zu verwenden.

erschweren. Verbreitet ist insbesondere die Redeweise, daß Wahrscheinlichkeiten als „degrees of belief“ verstanden werden können. Die Verwendung dieses Ausdrucks verbindet sich dann oft mit einer psychologisierenden Rhetorik. Zum Beispiel heißt es bei F. P. Ramsey (1926, S. 166):

„The subject of our inquiry is the logic of partial belief, and I do not think we can carry it far unless we have at least an approximate notion of what partial belief is, and how, if at all, it can be measured. [...] We must therefore try to develop a purely psychological method of measuring belief.“

Diese und ähnliche Formulierungen erwecken den Eindruck, daß Wahrscheinlichkeitsaussagen als Aussagen *über* „mentale Zustände“ konzipiert werden sollen.[12] Es ist jedoch bemerkenswert, daß Ramsey in dem gleichen Essay die Auffassung kritisiert, daß Wahrscheinlichkeitsaussagen als Aussagen über Gefühlszustände verstanden werden können. Er sagt z.B.:

„But when we seek to know what is the difference between believing more firmly and believing less firmly, we can no longer regard it as consisting in having more or less of certain observable feelings; at least I personally cannot recognize any such feelings.“ (Ramsey 1926, S. 170)

Der Vorschlag, den Ramsey schließlich entwickelt, um „degrees of belief“ quantifizierbar zu machen, hat auch tatsächlich mit einer psychologischen Theorie (mit der vielleicht Aussagen über „mentale Zustände“ formuliert werden können) nichts zu tun.[13] Er schlägt nämlich vor, „degrees of belief“ von Menschen dadurch zu „messen“, daß man ihnen Wetten vorschlägt. Dann geht es aber nicht darum, Gefühlszustände zu ermitteln, sondern man möchte herausfinden, welche Einschätzung von Hypothesen Menschen für „vernünftig“ oder „vertretbar“ halten.

3.5 Komparative Ordnung von Hypothesen

1. Zwei Fragen sollten unterschieden werden: Wie man Wahrscheinlichkeitsaussagen *verstehen* und wie man sie *begründen* kann. Eine solche Unterscheidung erleichtert es auch, ein Vorurteil zu vermeiden, das in der Literatur zur Wahrscheinlichkeitstheorie häufig auftritt; nämlich die Auffassung, daß eine Definition von ‘wahrscheinlich’ oder ‘Wahrscheinlichkeit’ durch die Angabe eines Verfahrens erfolgen sollte, mit dem Wahrscheinlichkeitsaussagen begründet werden können. Meistens wird diese Auffassung zugleich mit dem Postulat verknüpft, daß ‘Wahrscheinlichkeit’ von vornherein und in allen Anwendungsgebieten als ein (metrisierbarer) Größenbegriff aufgefaßt werden kann. Die Frage, wie Wahrscheinlichkeitsaussagen

[12]Zum Beispiel hat auch de Finetti (1972, S. xiii) von Wahrscheinlichkeiten als „expressions of subjective feeling“ gesprochen.

[13]In einer späteren Notiz bemerkte Ramsey (1929, S. 256) auch ausdrücklich: „The defect of my paper on probability was that it took partial belief as a psychological phenomenon to be defined and measured by a psychologist.”

verstanden werden können, wird dann mit einer ganz anderen Frage vermischt: Wie – durch ein Verfahren? – (numerisch bestimmte) Wahrscheinlichkeiten ermittelt werden können.

2. Wie schon gesagt worden ist, wird in dieser Arbeit die Auffassung vertreten, daß numerische Wahrscheinlichkeitsaussagen nur in einigen spezifischen Kontexten sinnvoll sind (mit denen wir uns später beschäftigen werden) und daß stattdessen zunächst und im allgemeinen von einem komparativen Verständnis von Wahrscheinlichkeitsaussagen ausgegangen werden sollte. Die Frage, wie Wahrscheinlichkeitsaussagen zu verstehen sind, kann dann so beantwortet werden, wie bereits in Abschnitt 3.3 angedeutet worden ist: Die Aussage

$$H \preceq_e H'$$

soll bedeuten, daß die Gründe, die für die Hypothese H' sprechen, mindestens so gut und überzeugend sind, wie die Gründe, die für die Hypothese H sprechen. Das ist ersichtlich keine operationale Definition. Diese Erläuterung des Sinns von Wahrscheinlichkeitsaussagen liefert kein Verfahren, um bei zwei beliebig vorgegebenen Hypothesen entscheiden zu können, ob die eine oder die andere wahrscheinlicher ist. Dennoch liefert sie ein Verständnis dessen, was mit einer Wahrscheinlichkeitsaussage gemeint ist. Diese Erläuterung impliziert im übrigen, daß sich Wahrscheinlichkeitsaussagen nicht auf „mentale Zustände“, sondern auf Begründungen für Hypothesen beziehen.

3. Redet man in sehr allgemeiner Weise von Wahrscheinlichkeitsaussagen, erscheint es möglich, daß man ihre Sprachform zum Vergleich beliebiger Hypothesen verwenden kann. Dann wird jedoch ziemlich rätselhaft, wie eine komparative Einschätzung von Gründen, die für oder gegen die Hypothesen angeführt werden können, vorgenommen werden kann. Es ist deshalb sinnvoll, die weiteren Überlegungen stets auf ein vorgegebenes System von Hypothesen zu beziehen, so daß eine Situation (oder eine bestimmte Menge von Situationen) fixiert werden kann, auf die sich die Hypothesen konkurrierend beziehen. Dafür wird die in Abschnitt 2.3 eingeführte Notation

$$\mathcal{H} := \{ \langle \omega, \tilde{k} \rangle \,|\, \tilde{k} \in \tilde{\mathcal{K}} \}$$

verwendet.

4. Hat man als Ausgangspunkt ein System von Elementarhypothesen $\mathcal{H}$, geht es im weiteren um die Formulierung und Begründung von Wahrscheinlichkeitsaussagen. Unter *elementaren* Wahrscheinlichkeitsaussagen sollen wiederum Aussagen der Form $H \preceq_e H'$ verstanden werden, wobei H und H' Hypothesen aus $\mathcal{H}$ sind. Daran anschließend können zwei weitere Sprachformen für elementare Wahrscheinlichkeitsaussagen eingeführt werden. Zunächst:

$$H \equiv_e H' \iff H \preceq_e H' \text{ und } H' \preceq_e H$$

was auch so verstanden werden kann, daß es (zur Zeit) keine Gründe gibt, eine der beiden Hypothesen für besser begründet zu halten als die andere. Weiterhin kann definiert werden:

$$H \prec_e H' \iff H \preceq_e H' \text{ und nicht } H' \equiv_e H$$

womit gemeint ist, daß die verfügbaren Gründe die Hypothese H' wahrscheinlicher machen als die Hypothese H.

5. Bezieht man sich auf ein System von Hypothesen $\mathcal{H}$, besteht ein sinnvolles Ziel darin, die Hypothesen mit Hilfe der Relationen $\preceq_e$, $\prec_e$ und $\equiv_e$ in eine Rangordnung zu bringen. Es kann jedoch nicht vorausgesetzt werden, daß dies stets gelingt. Es kann unklar sein, ob bei zwei Hypothesen ein sinnvoller Wahrscheinlichkeitsvergleich vorgenommen werden kann; außerdem können bei einer Diskussion unterschiedliche Auffassungen vertreten werden. Weiterhin ist es auch nicht unter allen Umständen sinnvoll, nach einer definitiven Wahrscheinlichkeitsaussage zu suchen, wie Keynes (1921, S. 30) mit folgendem Beispiel deutlich gemacht hat:

„Is our expectation of rain, when we start out for a walk, always *more* likely than not, or *less* likely than not, or *as* likely as not? I am prepared to argue that on some occasions *none* of these alternatives hold, and that it will be an arbitrary matter to decide for or against the umbrella. If the barometer is high, but the clouds are black, it is not always rational that one should prevail over the other in our minds, or even that we should balance them, – though it will be rational to allow caprice to determine us and to waste no time on the debate.“

Somit sollte im allgemeinen davon ausgegangen werden, daß durch eine Menge *begründbarer* Wahrscheinlichkeitsaussagen nur eine partielle Ordnung für die Hypothesen aus $\mathcal{H}$ verfügbar gemacht wird.[14]

3.6 Elementare Konsistenzbedingungen

1. Die zuvor angeführte Überlegung führt zu einer allgemeineren Fragestellung: Welche Regeln können für das Argumentieren mit komparativen Wahrscheinlichkeiten vorausgesetzt werden? Einige dieser Regeln, die als Konsistenzbedingungen sinnvollen Argumentierens verstanden werden können, sollen im folgenden besprochen werden. Dafür beziehen wir uns

[14]Es sei aber angemerkt, daß in der Literatur zur Wahrscheinlichkeitstheorie – soweit überhaupt von einem komparativen Verständnis von Wahrscheinlichkeitsaussagen ausgegangen wird – zumeist ohne Begründung unterstellt wird, daß es eine vollständige Ordnung für Wahrscheinlichkeitsvergleiche beliebiger Aussagen gibt. Zum Beispiel wurde diese Annahme von H. Jeffreys (1948, S. 17) als ein „Axiom“ vorausgesetzt; man vgl. auch Lenzen (1980, S. 82f.).

auf eine Algebra für Hypothesen $\mathcal{A}(\mathcal{H})$, die aus einem System von Elementarhypothesen $\mathcal{H}$ gebildet worden ist.

2. Zunächst kann man daran denken, daß für ein konsistentes Argumentieren die Transitivität der Relationen $\preceq_e$, $\prec_e$ und $\equiv_e$ vorausgesetzt werden sollte. Verwendet man exemplarisch die Relation $\preceq_e$, lautet die entsprechende Regel:

$$\text{Für alle } H, H', H'' \in \mathcal{A}(\mathcal{H}): \quad H \preceq_e H',\ H' \preceq_e H'' \implies H \preceq_e H'' \tag{3.6.1}$$

3. Eine zweite Regel betrifft den Vergleich einer durch $\vee$ zusammengesetzten Hypothese mit ihren Komponenten:

$$\text{Für alle } H, H' \in \mathcal{A}(\mathcal{H}): \quad H \preceq_e (H \vee H') \quad \text{und} \quad H' \preceq_e (H \vee H') \tag{3.6.2}$$

Denn alle Gründe, die für H sprechen, sprechen auch für $(H \vee H')$. Und entsprechend: Alle Gründe, die für H' sprechen, sprechen ebenfalls für die zusammengesetzte Hypothese $(H \vee H')$. Mit einer analogen Überlegung kann man sich klarmachen, daß folgende Regel sinnvoll ist:

$$\text{Für alle } H, H' \in \mathcal{A}(\mathcal{H}): \quad (H \wedge H') \preceq_e H \quad \text{und} \quad (H \wedge H') \preceq_e H' \tag{3.6.3}$$

Denn jeder Grund, der für $(H \wedge H')$ angeführt werden kann, kann auch für H und ebenfalls für H' angeführt werden.

4. Schließlich gibt es in einer Algebra für Hypothesen noch zwei Sonderfälle, die sich für eine Formulierung von Regeln verwenden lassen. Beide beruhen auf der Annahme, daß das System der Elementarhypothesen, das für die Bildung der Algebra verwendet wird, alle zur Zeit der Hypothesenbildung als relevant erachteten Möglichkeiten umfaßt. Man kann dann einerseits die Hypothese

$$H^s := H_1 \vee \cdots \vee H_m$$

bilden, wobei in der Oder-Verknüpfung alle Elementarhypothesen aus $\mathcal{H}$ vorkommen sollen.[15] Im Rahmen der durch $\mathcal{H}$ gegebenen Denkmöglichkeiten ist diese Hypothese stets zutreffend, und somit folgt aus (3.6.2) auch die folgende Regel:

$$\text{Für alle } H \in \mathcal{A}(\mathcal{H}): \ H \preceq_e H^s \tag{3.6.4}$$

[15]Werden die Hypothesen durch Rückgriff auf eine Kennzeichnungsmenge $\tilde{\mathcal{K}}$ gebildet, kann man auch die äquivalente Schreibweise $H^s := \langle \omega, \tilde{\mathcal{K}} \rangle$ verwenden.

Andererseits kann man auch eine Hypothese $H^u := \neg H^s$ bilden, die im Rahmen der durch $\mathcal{H}$ gegebenen Denkmöglichkeiten niemals zutreffend sein kann;[16] und man gewinnt die Regel

$$\text{Für alle } H \in \mathcal{A}(\mathcal{H}): \; H^u \preceq_e H \tag{3.6.5}$$

Man kann den Sinn dieser beiden Regeln auch so ausdrücken: Keine Hypothese kann weniger wahrscheinlich sein als eine Hypothese, die niemals zutreffend sein kann; und keine Hypothese kann wahrscheinlicher sein als eine Hypothese, die immer zutreffend ist.

5. Es sei angemerkt, daß in der Literatur noch weitere Regeln für Wahrscheinlichkeitsrelationen vorgeschlagen worden sind. Dabei besteht das Ziel meistens darin, so viele Regeln anzunehmen, daß mit ihrer Hilfe ein *quantitativer* Wahrscheinlichkeitsbegriff definiert werden kann.[17] Im Unterschied zu den oben angeführten Regeln haben jedoch die für einen quantitativen Wahrscheinlichkeitsbegriff zusätzlich erforderlichen Regeln keine intuitive Plausibilität, und wir werden uns hier deshalb mit Versuchen, eine „axiomatische Begründung" für einen quantitativen Wahrscheinlichkeitsbegriff zu finden, nicht näher beschäftigen.

3.7 Bewertungen und Wahrscheinlichkeiten

Es wurde schon darauf hingewiesen, daß sich ein großer Teil der in der Literatur zur Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematischen Statistik unternommenen Anstrengungen darauf richtet, quantitative Wahrscheinlichkeitsmaße zu konstruieren. In diesem Abschnitt soll überlegt werden, wie sich Bemühungen dieser Art mit einem qualitativen und komparativen Verständnis von Wahrscheinlichkeitsaussagen verbinden lassen.

3.7.1 Additive Bewertungsfunktionen

1. Im Mittelpunkt vieler Bestrebungen in der Wahrscheinlichkeitstheorie steht folgende Aufgabe: Es soll eine Funktion

$$\mathrm{P_e} : \mathcal{A}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathbf{R}$$

konstruiert werden, mit der jeder Hypothese H aus einem System von Hypothesen $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ eine numerisch bestimmte Wahrscheinlichkeit $\mathrm{P_e}(H)$ zugeordnet werden kann. Dabei wird fast immer vorausgesetzt, daß diese

[16] Als eine äquivalente Schreibweise kann in diesem Fall $H^u := \langle\, \omega, \emptyset \,\rangle$ verwendet werden.

[17] Der erste Versuch dieser Art wurde von Koopman (1940) ausgedacht; weitere Hinweise finden sich bei Lenzen (1980, Kap. 4).

Funktion einigen elementaren Bedingungen genügen soll; und zwar soll für alle Hypothesen $H, H' \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$ gelten:[18]

a) $0 \le \mathrm{P_e}(H) \le 1$

b) $\mathrm{P_e}(H^s) = 1$

c) Wenn $H \wedge H' = H^u$, dann: $\mathrm{P_e}(H \vee H') = \mathrm{P_e}(H) + \mathrm{P_e}(H')$

$\mathrm{P_e}$ wird dann ein (epistemisches) *Wahrscheinlichkeitsmaß* für das System von Hypothesen $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ genannt.[19]

2. Diese Regeln für ein Wahrscheinlichkeitsmaß entsprechen offenbar denjenigen, die für statistische Häufigkeitsfunktionen gelten (Abschnitt 2.7). Zwar ist die inhaltliche Bedeutung eine ganz unterschiedliche; bei einer rein formalen Betrachtung kann man sich jedoch in beiden Fällen auf eine Algebra für Mengen beziehen und dann annehmen, daß es eine Mengenfunktion gibt, die den oben angegebenen Regeln genügt. Mengenfunktionen dieser Art werden in diesem Text *additive Bewertungsfunktionen* genannt. Diese Bezeichnung erscheint sinnvoll, um nicht von vornherein den Anspruch zu unterstellen, daß mit der Konstruktion einer solchen Funktion eine Quantifizierung epistemischer Wahrscheinlichkeiten angestrebt oder vorgeschlagen wird.

3. Der heute weitgehend akzeptierte Vorschlag, eine mathematische Wahrscheinlichkeitsrechnung als eine Theorie additiver Bewertungsfunktionen zu konzipieren, stammt von A. Kolmogoroff (1933). Sein Ziel bestand darin, eine Wahrscheinlichkeitsrechnung axiomatisch und rein formal einzuführen, um sie dadurch von den inhaltlichen Kontroversen um das Verständnis von Wahrscheinlichkeitsaussagen ablösen und als ein Teilgebiet der Mathematik begründen zu können. In der Einleitung zu seiner Arbeit schreibt Kolmogoroff:

„Zweck des vorliegenden Heftes ist eine axiomatische Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Der leitende Gedanke des Verfassers war dabei, die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, welche noch unlängst für ganz eigenartig galten, natürlicherweise in die Reihe der allgemeinen Begriffsbildungen der modernen Mathematik einzuordnen." (S. III)

„Die Wahrscheinlichkeitstheorie als mathematische Disziplin soll und kann genau in demselben Sinne axiomatisiert werden wie die Geometrie oder die Algebra. Das bedeutet, daß, nachdem die Namen der zu untersuchenden Gegenstände und ihrer Grundbeziehungen sowie die Axiome, denen diese Grundbeziehungen

[18] Zur Definition von H^s und H^u vgl. Abschnitt 3.6. Mit der Formulierung $H \wedge H' = H^u$ ist gemeint, daß sich die Hypothesen H und H' ausschließen.

[19] Da der Begriff eines Wahrscheinlichkeitsmaßes in der Literatur auch in allgemeineren Bedeutungen verwendet wird, kann man bei der o.a. Definition genauer von einem *endlichen additiven* Wahrscheinlichkeitsmaß sprechen.

zu gehorchen haben, angegeben sind, die ganze weitere Darstellung sich ausschließlich auf diese Axiome gründen soll und keine Rücksicht auf die jeweilige konkrete Bedeutung dieser Gegenstände und Beziehungen nehmen darf.“ (S. 1)

Nur ein kurzer Abschnitt in Kolmogoroffs Arbeit beschäftigt sich mit einer inhaltlichen Motivation des Vorschlags, von additiven Bewertungsfunktionen auszugehen; zur Begründung wird im wesentlichen nur auf die formale Analogie zu statistischen Häufigkeitsfunktionen hingewiesen. In dem Abschnitt mit der Überschrift „Das Verhältnis zur Erfahrungswelt“, in dem diese Überlegung ausgeführt wird, heißt es gleich zu Beginn (S. 3):

„Ein Leser, der sich nur für die rein mathematische Entwicklung der Theorie interessiert, braucht diesen Paragraphen nicht zu lesen – die weitere Darstellung beruht auf den Axiomen des § 1 und benutzt nicht die Überlegungen des gegenwärtigen Paragraphen. In diesem wollen wir uns mit dem bloßen Hinweis auf die empirische Entstehung der Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung begnügen und lassen deshalb eine eingehende philosophische Untersuchung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes in der Erfahrungswelt bewußt beiseite.“

3.7.2 Bewertungen von Hypothesen

1. Den Sinn einer axiomatischen Begründung kann man darin sehen, daß dadurch die Entwicklung einer *mathematischen* Wahrscheinlichkeitsrechnung von den grundlegenden und kontroversen Fragestellungen der Wahrscheinlichkeits*theorie* abgekoppelt werden kann. Ein Vertreter der mathematischen Wahrscheinlichkeitsrechnung hat das so gesagt:

„Now that probability theory has become an acceptable part of mathematics, words like ‘occurrence’, ‘event’, ‘urn’, ‘die’, and so on can be dispensed with. These words and the ideas they represent, however, still add intuitive significance to the subject and suggest analytical methods and new investigations. It is for this reason that probability language is still used even in purely theoretical investigations.“ (Doob 1953, S. 1)

Wenn jedoch Begriffsbildungen der Wahrscheinlichkeitstheorie zur Reflexion von Hypothesen verwendet werden sollen, die sich auf unsere Erfahrungswelt beziehen, ist der axiomatische Standpunkt der Mathematiker unzweckmäßig. Dann kommt es vielmehr darauf an, den möglichen Sinn von Wahrscheinlichkeitsaussagen zu verstehen.[20]

[20] Hierzu bemerkte R. v. Mises (1951/1990, S. 226): „Es läßt sich natürlich nichts dagegen sagen, daß sich jemand mit dem rein tautologischen Teil der Theorie eines Sachgebietes befaßt und dafür eine zusammenfassende Darstellung gibt, ohne auf den empirischen Ausgangspunkt zurückzugreifen. Nur darf er dann nicht die Resultate der Rechnung in einer Form aussprechen, die den Eindruck erweckt, als würden durch diese Überlegungen Aussagen über bestimmte wirkliche Vorgänge gewonnen.“

2. Noch ein weiterer Grund spricht dafür, bei Überlegungen zum Verständnis und zur Begründbarkeit von Wahrscheinlichkeitsaussagen nicht vorauszusetzen, daß eine als Wahrscheinlichkeitsmaß verwendbare additive Bewertungsfunktion immer schon zur Verfügung steht. Folgt man nämlich der von Kolmogoroff angegebenen Motivation für sein Axiomensystem, wie es im vorangegangenen Abschnitt kurz angedeutet worden ist, erkennt man, daß es nur innerhalb eines sehr spezifischen Verwendungszusammenhangs eine sinnvolle Interpretation erlaubt: wenn man es mit Experimenten zu tun hat, die unter gleichen Bedingungen beliebig oft wiederholbar sind. Kolmogoroff setzt also ein sehr spezifisches „Verhältnis zur Erfahrungswelt“ voraus, um zu zeigen, daß mit den begrifflichen Hilfsmitteln seines Axiomensystems auch Wahrscheinlichkeitsaussagen (und nicht nur mathematische Sätze über additive Bewertungsfunktionen) formuliert werden können. Dieser Verwendungszusammenhang kann jedoch bei den meisten Wahrscheinlichkeitsaussagen nicht vorausgesetzt werden.

3. Man kann sich infolgedessen die Frage stellen, ob die in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischen Statistik betriebenen Bemühungen um eine Konstruktion von Bewertungsfunktionen, die sich als Wahrscheinlichkeitsmaße interpretieren lassen oder aus ihnen abgeleitet werden können, zum Verständnis und zur Begründung *epistemischer* Wahrscheinlichkeitsaussagen überhaupt relevant sind. Daraus, daß epistemische Wahrscheinlichkeiten im allgemeinen nicht quantifizierbar sind, folgt jedoch nur, daß die Idee epistemischer Wahrscheinlichkeitsaussagen durch ein quantitatives Wahrscheinlichkeitsmaß nicht erschöpfend erfaßt werden kann. Die Möglichkeit, daß quantitative Bewertungsfunktionen gleichwohl *zur Beurteilung* von Wahrscheinlichkeitsaussagen dienen können, sollte jedenfalls nicht von vornherein ausgeschlossen werden.

4. Angenommen, man kann sich auf eine Algebra für Hypothesen $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ beziehen. Zwar erscheint es in den meisten Fällen aussichtslos, ein Wahrscheinlichkeitsmaß zu finden, mit dem folgende Regel begründet werden könnte:

$$\mathrm{P_e}(H) < \mathrm{P_e}(H') \iff H \prec_e H' \tag{3.7.1}$$

Denn mit der Aussage $H \prec_e H'$ ist gemeint, daß es für H' bessere Gründe gibt als für H; und ob dies der Fall ist, hängt stets von einem explizit darzulegenden Begründungszusammenhang ab, der nicht situationsunabhängig fixiert und reguliert werden kann.[21]

5. Aus dieser Überlegung folgt allerdings nicht, daß additive Bewertungsfunktionen für epistemische Wahrscheinlichkeitsaussagen stets irrelevant

[21] Man kann sich auch anhand von Beispielen verdeutlichen, daß nicht jede Menge komparativer Wahrscheinlichkeitsaussagen durch ein epistemisches Wahrscheinlichkeitsmaß repräsentiert werden kann. Folgendes Beispiel wurde von Kraft, Platt und Seidenberg angegeben; vgl. Fishburn (1986, S. 337). Es ist $\tilde{\mathcal{K}} := \{1, 2, 3, 4, 5\}$, und es sind folgende

sind. Denn man kann sich durchaus Situationen vorstellen, in denen Bewertungsfunktionen konstruiert werden können, die sich mit Wahrscheinlichkeitsaussagen auf folgende Weise in einen Zusammenhang bringen lassen:

$$\mathrm{P_e}(H) < \mathrm{P_e}(H') \;\rightsquigarrow\; H \prec_e H' \tag{3.7.2}$$

womit gemeint sein soll: Die Aussage $\mathrm{P_e}(H) < \mathrm{P_e}(H')$ *liefert ein Argument* zur Begründung der Wahrscheinlichkeitsaussage $H \prec_e H'$. Ein solches Verständnis muß offenbar von einer Auffassung, wie sie in (3.7.1) zum Ausdruck kommt, unterschieden werden. Denn (3.7.2) impliziert nicht den Anspruch, daß durch $\mathrm{P_e}$ eine erschöpfende Explikation epistemischer Wahrscheinlichkeit gegeben wird (ein Anspruch, der auch stets nur zu Kontroversen geführt hat); der Anspruch ist viel bescheidener: daß Aussagen, die mit Hilfe von $\mathrm{P_e}$ über ein System von Hypothesen gemacht werden können, bei der Einschätzung ihrer epistemischen Wahrscheinlichkeiten *als Argumente* verwendet werden können. Damit wird insbesondere nicht die Möglichkeit ausgeschlossen, daß es zur Beurteilung der fraglichen Hypothesen noch andere Gesichtspunkte und Argumente geben kann, die in der Konzeption von $\mathrm{P_e}$ nicht berücksichtigt worden sind. Ein Beispiel, in dem ein Schema der Form (3.7.2) sinnvoll erscheint, wird in Abschnitt 4.2.2 besprochen.

3.7.3 Ergänzende Bemerkungen

1. Der hier zur Diskussion gestellte Vorschlag besteht darin, epistemische Wahrscheinlichkeitsaussagen als komparative Urteile über Begründungen

---

komparativen Wahrscheinlichkeitsaussagen gegeben:

$$\langle\,\omega,\{1,3\}\,\rangle \prec_e \langle\,\omega,\{4\}\,\rangle \qquad \langle\,\omega,\{1,4\}\,\rangle \prec_e \langle\,\omega,\{2,3\}\,\rangle$$
$$\langle\,\omega,\{3,4\}\,\rangle \prec_e \langle\,\omega,\{1,5\}\,\rangle \qquad \langle\,\omega,\{2,5\}\,\rangle \prec_e \langle\,\omega,\{1,3,4\}\,\rangle$$

Sei jetzt angenommen, daß es eine additive Bewertungsfunktion $\mathrm{P_e}$ gibt, für die die Regel (3.7.1) gilt. Wegen der Additivität erhält man dann:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P_e}(\langle\,\omega,\{1\}\,\rangle)+\mathrm{P_e}(\langle\,\omega,\{3\}\,\rangle) \;<\; \mathrm{P_e}(\langle\,\omega,\{4\}\,\rangle)\\
&\mathrm{P_e}(\langle\,\omega,\{1\}\,\rangle)+\mathrm{P_e}(\langle\,\omega,\{4\}\,\rangle) \;<\; \mathrm{P_e}(\langle\,\omega,\{2\}\,\rangle)+\mathrm{P_e}(\langle\,\omega,\{3\}\,\rangle)\\
&\mathrm{P_e}(\langle\,\omega,\{3\}\,\rangle)+\mathrm{P_e}(\langle\,\omega,\{4\}\,\rangle) \;<\; \mathrm{P_e}(\langle\,\omega,\{1\}\,\rangle)+\mathrm{P_e}(\langle\,\omega,\{5\}\,\rangle)\\
&\mathrm{P_e}(\langle\,\omega,\{2\}\,\rangle)+\mathrm{P_e}(\langle\,\omega,\{5\}\,\rangle) \;<\; \mathrm{P_e}(\langle\,\omega,\{1\}\,\rangle)+\mathrm{P_e}(\langle\,\omega,\{3\}\,\rangle)+\mathrm{P_e}(\langle\,\omega,\{4\}\,\rangle)
\end{aligned}$$

Addiert man nun die rechten und linken Seiten dieser Ungleichungen, erhält man aber:

$$\begin{aligned}
&2\,\mathrm{P_e}(\langle\,\omega,\{1\}\,\rangle)+\mathrm{P_e}(\langle\,\omega,\{2\}\,\rangle)+2\,\mathrm{P_e}(\langle\,\omega,\{3\}\,\rangle)+2\,\mathrm{P_e}(\langle\,\omega,\{4\}\,\rangle)+\mathrm{P_e}(\langle\,\omega,\{5\}\,\rangle)\\
<\;&2\,\mathrm{P_e}(\langle\,\omega,\{1\}\,\rangle)+\mathrm{P_e}(\langle\,\omega,\{2\}\,\rangle)+2\,\mathrm{P_e}(\langle\,\omega,\{3\}\,\rangle)+2\,\mathrm{P_e}(\langle\,\omega,\{4\}\,\rangle)+\mathrm{P_e}(\langle\,\omega,\{5\}\,\rangle)
\end{aligned}$$

also: $0 < 0$, ein offensichtlicher Widerspruch. Es gibt also in diesem Beispiel keine additive Bewertungsfunktion, die mit den komparativen epistemischen Wahrscheinlichkeitsaussagen übereinstimmt.

von Hypothesen aufzufassen. Aus diesem Verständnis erhält man auch einen Hinweis, wie Wahrscheinlichkeitsaussagen zu begründen sind: Zur Begründung einer Wahrscheinlichkeitsaussage, mit der behauptet wird, daß eine Hypothese H' besser begründet ist als eine Hypothese H, muß *dieser Anspruch* einsichtig gemacht werden. Dies geschieht praktisch dadurch, daß Gründe, die für oder gegen die Hypothesen sprechen, erwogen und verglichen werden. Wie stets, wenn eine Behauptung begründet werden soll, ist eine Argumentation erforderlich, die die Behauptung einsichtig machen soll.

2. Ein Verständnis der Aufgabe, Wahrscheinlichkeitsaussagen zu begründen, hängt allerdings davon ab, wie Wahrscheinlichkeitsaussagen – was durch sie behauptet werden soll – verstanden werden sollten. Wir unterscheiden deshalb die hier vertretene Auffassung, wonach es sich um komparative Aussagen über Begründungen handelt, von einer alternativen Konzeption, bei der der Versuch gemacht wird, Wahrscheinlichkeitsaussagen als Aussagen über eine „epistemische Relation“ zwischen einer Hypothese und einem für ihre Begründung verfügbaren Wissen zu konzipieren. Dieser Gedanke wurde zum Beispiel von Keynes (1921, S. 3f.) so formuliert:

> „All propositions are true or false, but the knowledge we have of them depends on our circumstances; and while it is often convenient to speak of propositions as certain or probable, this expresses strictly a relationship in which they stand to a *corpus* of knowledge, actual or hypothetical, and not a characteristic of the propositions in themselves. A proposition is capable at the same time of varying degrees of this relationship, depending upon the knowledge to which it is related, so that it is without significance to call a proposition probable unless we specify the knowledge to which we are relating it.“

Keynes hat deshalb vorgeschlagen, für Wahrscheinlichkeitsaussagen die Schreibweise H/W zu verwenden, wobei H auf eine (hypothetische) Aussage und W auf eine als (hypothetisches) Wissen voraussetzbare Menge von Aussagen verweist. Die Idee besteht insoweit darin, Wahrscheinlichkeitsaussagen als Aussagen über eine „epistemische Relation“ zwischen W und H aufzufassen; in den Worten von Keynes (1921, S. 6):

> „Between two sets of propositions, therefore, there exists a relation, in virtue of which, if we know the first, we can attach to the latter some degree of rational belief. This relation is the subject-matter of the logic of probability.“

3. Eine ähnliche Konzeption wurde auch von H. Reichenbach (1949, S. 41f.) vorgeschlagen:

> „Betrachten wir irgendeine Wahrscheinlichkeitsaussage, z.B. die Behauptung, daß beim Würfeln das Auftreten der Seite 1 mit der Wahrscheinlichkeit 1/6 zu erwarten ist, so stellen wir fest, daß diese Behauptung die logische Form einer *Relation* hat. Es wird nämlich das Auftreten der Seite 1 keineswegs schlechthin mit der Wahrscheinlichkeit 1/6 behauptet, sondern diese Behauptung wird an eine Bedingung geknüpft, die Bedingung nämlich, daß der Würfel geworfen wird.

> Wenn man den Würfel wirft, so ist mit der Wahrscheinlichkeit 1/6 das Auftreten der Seite 1 zu erwarten – dies ist die Form, in der wir die Wahrscheinlichkeitsaussage aussprechen; und niemand würde behaupten, daß die Wahrscheinlichkeit, einen Würfel mit obenliegender Seite 1 auf dem Tisch zu finden, 1/6 auch dann beträgt, wenn gar nicht geworfen wird. Die Wahrscheinlichkeit ist deshalb vom Charakter einer Implikation; sie enthält ein Vorderglied und ein Hinterglied, und zwischen diesen wird die Relation der Wahrscheinlichkeit behauptet. Wir nennen diese Relation *Wahrscheinlichkeitsimplikation* und stellen sie dar durch das Zeichen $\underset{p}{\ni\!\!\!-}$. Dies ist das einzige neue Zeichen, welches die Wahrscheinlichkeitsrechnung zu den Zeichen des Logikkalküls hinzunimmt. Seine Verwandtschaft zu der strengen Implikation der Logik soll durch die Form angedeutet werden, indem wir das Zeichen der strengen Implikation mit einem Strich kreuzen. Während die strenge Implikation Aussagen von der Form macht: 'wenn a wahr ist, dann ist b wahr' macht die Wahrscheinlichkeitsimplikation Aussagen der Form 'wenn a wahr ist, ist b wahrscheinlich vom Grade p'."

Zwar schränkt Reichenbach den Bereich möglicher Aussagen, die durch eine Wahrscheinlichkeitsimplikation verknüpft werden können, im weiteren ein; zugelassen sind bei ihm nur „Aussagen über die Klassenzugehörigkeit von Elementen gewisser gegebener Folgen" (ebd., S. 43). Dennoch ist der Grundgedanke mit dem von Keynes vergleichbar: Beide Autoren konzipieren Wahrscheinlichkeitsaussagen in einer Analogie zur logischen Implikation.[22] Dies ist auch deshalb bemerkenswert, weil Reichenbach schließlich eine frequentistische Deutung von Wahrscheinlichkeitsaussagen vorschlägt.

4. Auch die in Abschnitt 3.3 eingeführte Schreibweise $H \preceq_e H'$ verweist auf eine Relation. Es ist jedoch wichtig, die in dieser Notation gemeinte Relation von derjenigen zu unterscheiden, die durch eine relationale Konzeption des Wahrscheinlichkeitsbegriffs vorstellbar gemacht werden soll. In unserer Notation bezieht sich eine Wahrscheinlichkeitsaussage auf zwei Hypothesen; ein Wahrscheinlichkeitsurteil soll zum Ausdruck bringen, welche der beiden Hypothesen besser begründet ist. Das jeweils verfügbare Wissen, das für die Begründung einer solchen Wahrscheinlichkeitsaussage zur Verfügung steht, wird in dieser Notation nicht explizit erwähnt. Bei der oben exemplarisch anhand von Keynes und Reichenbach erläuterten Konzeption geht es dagegen darum, in welchem Ausmaß eine Aussage durch eine andere Aussage wahrscheinlich gemacht wird. In diesem Fall wird also versucht, den *Sinn* von Wahrscheinlichkeitsaussagen durch eine „epistemische Relation" zwischen Aussagen zu explizieren.

[22]Es gibt noch eine Reihe weiterer Varianten. So kann z.B. auf Carnaps (1962) Versuche hingewiesen werden, eine „induktive Logik" zu entwickeln, um in quantifizierender Weise davon sprechen zu können, in welchem Ausmaß eine Menge von Aussagen durch eine andere Menge von Aussagen wahrscheinlich gemacht wird; Carnap spricht auch von einem „degree of confirmation" und von „induktiver Wahrscheinlichkeit"; eine Einführung findet sich bei Carnap und Stegmüller (1959). Verbreitet ist der Gedanke, daß Wahrscheinlichkeit als eine Relation zwischen Aussagen konzipiert werden kann, auch in einer Reihe von „subjektiven" Wahrscheinlichkeitsdeutungen, die ihren Basisbegriff – „degree of belief" – relational deuten; exemplarisch kann auf H. Jeffreys (1948, S. 15f.) hingewiesen werden: „Our fundamental idea will not be simply the probability of a proposition p, but the probability of p on data q." „Our primitive notion, then, is that of the relation 'given p, q is more probable than r', where p, q, and r are three propositions."

5. Die Unterscheidung wird dadurch etwas erschwert, daß Keynes (wie auch Jeffreys in der oben angeführten Fußnote) Wahrscheinlichkeitsaussagen zunächst in einer komparativen Weise formuliert; im Anschluß an die Keynes'sche Notation: $H/W < H'/W$. Hierbei wird jedoch angenommen, daß sowohl H/W als auch H'/W bereits sinnvolle sprachliche Ausdrücke sind: die Wahrscheinlichkeit von H in Relation zu W und die Wahrscheinlichkeit von H' in Relation zu W. Der Gedanke, daß man Wahrscheinlichkeit als eine „epistemische Relation" auffassen könne, soll gerade dazu dienen, diese separaten Ausdrücke zu explizieren. Es handelt sich ersichtlich um einen entscheidenden Argumentationsschritt, wenn man schließlich eine Quantifizierung von Graden der Wahrscheinlichkeit einführen möchte. Eine wichtige Frage besteht deshalb darin, ob sich bei Ausdrücken der Form H/W sinnvoll von einer Wahrscheinlichkeit sprechen läßt.

6. Eine Diskussion dieser Frage ist natürlich sinnlos, wenn eine Theoriebildung damit beginnt, einen sprachlichen Ausdruck $\mathrm{P}(H/W)$ als subjektiv quantifizierbaren „degree of belief" zum Ausgangspunkt weiterer Begriffsbildungen zu machen. Der Vorschlag, daß man einen Ausdruck der Form $\mathrm{P}(H/W)$ durch eine „epistemische Relation" zwischen W und H *explizierbar* machen kann, ist dagegen gerade deshalb interessant, weil durch ihn auf das Problem aufmerksam gemacht wird, *ob* epistemische Wahrscheinlichkeiten quantifizierbar sind. Denn diesem Zweck dient schließlich die Behauptung, daß man von einer „epistemischen Relation" zwischen W und H sprechen könne. Die Behauptung zielt darauf, daß man für Wahrscheinlichkeitsaussagen die Existenz einer „epistemischen Relation" zwischen W und H *als etwas durch W und H Gegebenes* voraussetzen könne.[23] Das war auch die Auffassung von Keynes, wie zum Beispiel folgende Bemerkung (1921, S. 4) deutlich macht:

> „A proposition [in unserer Notation H] is capable at the same time of varying degrees of this relationship, depending upon the knowledge [in unserer Notation W] to which it is related [...]. To this extent, therefore, probability may be called subjective. But in the sense important to logic, probability is not subjective. It is not, that is to say, subject to human caprice. A proposition is not probable because we think it so. When once the facts are given which determine our knowledge, what is probable or improbable in these circumstances has been fixed objectively, and is independent of our opinion."

Die Annahme besteht also darin, daß man die „epistemische Relation"

[23]Diese Annahme ist zwar nicht hinreichend, um schließlich auch noch eine Metrik einzuführen; aber sie bildet die entscheidende Voraussetzung, um epistemische Wahrscheinlichkeit als einen Größenbegriff konzipieren zu können.

zwischen W und H in Analogie zu einem objektiven Sachverhalt auffassen könne.[24]

7. Aber für die Annahme, daß eine „epistemische Relation“ zwischen W und H als ein erkennbarer *Sachverhalt* vorausgesetzt werden kann, gibt es keinerlei Begründung.[25] In dieser Formulierung ist die Annahme sogar dann fragwürdig, wenn H als eine logische Implikation aus W folgt, denn auch dann handelt es sich nicht um einen relationalen Sachverhalt, sondern um eine argumentativ herstellbare Beziehung zwischen Aussagen. In diesem Fall wären allerdings Wahrscheinlichkeitsaussagen überflüssig, denn H könnte durch W begründet werden. Wenn jedoch H keine logische Implikation von W ist, kann W bestenfalls ein unvollständiges Argument liefern, das für die Einschätzung der Wahrscheinlichkeit von H eine Rolle spielen kann. Aber auch diese Formulierung ist potentiell irreführend, insofern sie unterstellt, daß man eine einzelne Hypothese mehr oder weniger wahrscheinlich nennen kann. Sieht man ein, daß es sich bei der „epistemischen Relation“ zwischen W und H bestenfalls um ein Argument handeln kann, muß die Fragestellung selbst reformuliert werden, etwa so: Welches argumentative Gewicht kann dem durch W vorausgesetzten Wissen für einen Vergleich von zwei oder mehr konkurrierenden Hypothesen gegeben werden? Dann wird jedoch selbst ein metaphorisches Reden von einer „epistemischen Relation“ zwischen W und H hinfällig. Man ist vielmehr zu einem komparativen Verständnis epistemischer Wahrscheinlichkeitsaussagen zurückgekehrt.

8. Aber könnte es nicht auch bei einem komparativen Verständnis von Wahrscheinlichkeitsaussagen sinnvoll sein, das zu ihrer Begründung (zur Einschätzung der konkurrierenden Hypothesen) verfügbare Wissen explizit anzugeben? Denn darin bestand ja zunächst der prima facie plausible Grundgedanke von Keynes und vieler anderer Autoren: daß es darum gehen sollte, die Abhängigkeit von Wahrscheinlichkeitsaussagen von einem jeweils verfügbaren Wissen explizit zu machen. Dieser Gedanke kann jedoch auf zwei unterschiedliche Weisen verstanden werden. Ein aus unserer Sicht sinnvolles Verständnis kann etwa so formuliert werden: Bei der Begründung einer epistemischen Wahrscheinlichkeitsaussage sollten die dafür

[24] Das Motiv für diese Annahme wird daraus deutlich, wie das Zitat weitergeht: „The Theory of Probability is logical, therefore, because it is concerned with the degree of belief which it is *rational* to entertain in given conditions, and not merely with the actual beliefs of particular individuals, which may or may not be rational.“ Nicht nur Keynes, auch viele andere Autoren haben sich bemüht, ihre Überlegungen zur Bedeutung und Begründbarkeit von Wahrscheinlichkeitsaussagen mit einer jeweils spezifischen normativen Konzeption von „Rationalität“ zu verknüpfen. Aber die Wahrscheinlichkeitstheorie ist sicherlich nicht dafür zuständig, normative Standards für rationales Denken und Handeln zu entwickeln.

[25] Dies ist auch das Kernargument in Ramseys (1926, S. 160ff.) ausführlicher Kritik des Ansatzes von Keynes.

verwendeten Fakten, Annahmen und Überlegungen möglichst explizit gemacht werden. Die Theorieansätze von Keynes, Jeffreys, Carnap u. a. folgen jedoch einem anderen Verständnis, indem sie von der Annahme ausgehen, daß das zur Begründung einer Wahrscheinlichkeitsaussage verfügbare Wissen vor und unabhängig von einem tatsächlichen Bemühen um eine Begründung fixiert werden kann. Erst diese Annahme erlaubt es, von einem verfügbaren Wissen so zu sprechen, als ob es sich um einen Sachverhalt handelt (der dann durch W symbolisch repräsentiert werden kann). Und erst dadurch kann man schließlich auf den Gedanken kommen, von einer „epistemischen Relation“ zwischen W und H zu sprechen.

9. Man kann sich jedoch überlegen, daß diese Vorstellung eines „verfügbaren Wissens“ problematisch ist. Bestenfalls kann man vorab – d. h. bevor man sich tatsächlich um die Begründung einer Wahrscheinlichkeitsaussage bemüht – einige der Voraussetzungen fixieren, die für eine Begründung relevant sein könnten. Dementsprechend spricht zum Beispiel Jeffreys davon, daß das jeweils verfügbare Wissen in einer Menge von „Daten“ besteht.[26] Daß jedoch eine Charakterisierung des verfügbaren Wissens durch Daten ganz unzureichend ist, kann man sich anhand eines Beispiels verdeutlichen, das Jeffreys (1948, S. 15) selbst angeführt hat:

> „Suppose that I know that Smith is an Englishman, but otherwise know nothing particular about him. He is very likely, on that evidence, to have a blue right eye. But suppose that I am informed that his left eye is brown – the probability is changed completely.“

Daraus, daß das linke Auge von Mr. Smith braun ist, folgt natürlich nicht, daß auch sein rechtes Auge braun ist. Das Wissen, das Jeffreys in diesem Beispiel verwendet, besteht auch keineswegs nur in der Information über die Farbe des linken Auges. Diese Information könnte gar nicht genutzt werden, wenn nicht ein weiteres Wissen vorhanden wäre: daß sehr oft (oder nur bei Engländern?) beide Augen die gleiche Farbe haben. Aber bei diesem zusätzlich erforderlichen Wissen handelt es sich nicht um „Daten“. Man kann vielleicht sagen, daß in diesem Beispiel die Information über die Farbe des linken Auges von Mr. Smith ein „Datum“ ist. Aber die Annahme, daß in vielen Fällen beide Augen die gleiche Farbe haben, ist kein „Datum“, sondern eine „Regel“, die nicht als etwas „Gegebenes“ zur Verfügung steht.[27] Somit zeigt das Beispiel, daß es im allgemeinen

[26] Vgl. das oben angeführte Zitat. Auch andere Autoren sprechen in diesem Zusammenhang oft von „Daten“. Zum Beispiel heißt es bei Carnap und Stegmüller (1959, S. 6): „Eine Aussage über *induktive Wahrscheinlichkeit* hat eine Relation zwischen einer Hypothese und einer Gesamtheit von Erfahrungsdaten (z.B. bestimmten Beobachtungsergebnissen) zum Inhalt.“

[27] Übrigens eine Regel, von der man wohl nicht sagen kann, daß es sich um ein „Naturgesetz“ handelt. Jedenfalls kann man sich vorstellen, daß Menschen die Fähigkeit haben oder erlangen könnten, sich unterschiedliche Augenfarben zu machen, auch wenn sie „von Natur aus“ gleich sein sollten.

nicht möglich ist, das zur Begründung von Wahrscheinlichkeitsaussagen *verwendete* Wissen vollständig vorab zu fixieren.

10. Schließlich gibt es noch eine weitere fragwürdige Implikation, wenn epistemische Wahrscheinlichkeitsaussagen als Aussagen über eine „epistemische Relation" zwischen einer Hypothese und „Daten" konzipiert werden. Es wird dann unklar, in welcher Weise sie überhaupt noch einen empirischen Sinn haben können. Einige Autoren, die diese „epistemische Relation" als eine „logische Relation" zwischen Aussagen auffassen, sind infolgedessen auch zu der Auffassung gelangt, daß epistemische Wahrscheinlichkeitsaussagen – vergleichbar mit logischen Aussagen – überhaupt keinen empirischen Gehalt haben. Diese Auffassung haben zum Beispiel Carnap und Stegmüller (1959, S. 7) vertreten:

„Für diesen Begriff der induktiven Wahrscheinlichkeit oder des Bestätigungsgrades ist der relationale Charakter wesentlich: Eine Aussage, die vom Bestätigungsgrad einer Hypothese handelt, muß stets auch auf ein Erfahrungsdatum Bezug nehmen. Dies ist nicht mit dem für alle naturwissenschaftlichen Aussagen gültigen Prinzip zu verwechseln, daß die Aussage auf Beobachtungen beruhen muß. Die Aussage 'die Wahrscheinlichkeit, daß es morgen regnen wird, ist 1/6' ist ein unvollständiger Satz, solange nicht der Zusatz hinzugefügt wird 'in bezug auf diese und diese Erfahrungsdaten'. Die Erfahrungsdaten werden z.B. im vorliegenden Falle gewisse meteorologische Beobachtungen sein. Ist der Satz durch diese Einbeziehung einmal vollständig geworden, dann spielt es für seine Gültigkeit weder eine Rolle, ob die erwähnten Erfahrungsdaten wahr sind oder nicht, noch ob sie dem Sprecher bekannt sind. [...] Eine induktive Wahrscheinlichkeitsaussage hat also die Gestalt 'die Wahrscheinlichkeit (der Bestätigungsgrad) der Hypothese h auf Grund der Erfahrungsdaten e ist so und so groß'. Alles für die Wahrscheinlichkeitsbeurteilung relevante Wissen ist bereits innerhalb dieses Satzes selbst ausgedrückt, nämlich durch die Einbeziehung von e. Daraus ergibt sich, daß der Grund für die Gültigkeit einer solchen Wahrscheinlichkeitsaussage nicht selbst wiederum empirischer Natur sein kann."

Offenbar beruht das Argument auf der Annahme, daß es möglich sei, das gesamte für die Beurteilung einer Hypothese relevante empirische Wissen im Konditionalteil einer Wahrscheinlichkeitsaussage explizit zu machen. Wenn dies jedoch nicht richtig ist, wie das oben angeführte Beispiel zeigen sollte, entfällt nicht nur die Möglichkeit, den Zusammenhang zwischen Hypothese und Daten als eine „logische Relation" zu deuten, sondern die Wahrscheinlichkeitsaussagen selbst können dann nicht als „logische", im Sinne von nicht-empirischen Aussagen verstanden werden.

11. Aber handelt es sich infolgedessen um empirische Aussagen? Aus der Sicht einer empiristischen Wissenschaftstheorie, wie sie von Carnap und Stegmüller in der oben angeführten Abhandlung vertreten wurde, gäbe es dann nur diese Alternative. Aber auch in dieser Hinsicht erweist sich ein Verständnis epistemischer Wahrscheinlichkeitsaussagen als komparative Urteile über Begründungen von Hypothesen als sinnvoller. Sie beziehen sich infolgedessen nicht unmittelbar auf unsere Erfahrungswelt; das

geschieht vielmehr durch die Hypothesen. Aber indem sich Wahrscheinlichkeitsaussagen auf *Begründungen* von Hypothesen beziehen, betreffen sie gleichwohl unsere Wissensbildung über die Erfahrungswelt. Es soll ja durch eine Einschätzung der Gründe für und gegen konkurrierende Hypothesen Wissen gebildet werden, wenn auch nur in der Form eines mehr oder weniger gut begründeten hypothetischen Wissens. Aber zur Begründung dieses Wissens spielen natürlich empirische Argumente eine entscheidende Rolle. Es geht nicht um eine „logische Beziehung" zwischen einer Hypothese H und einer Menge von Daten W, sondern W soll *als ein Argument* dienen, um einschätzbar zu machen, wie gut H (im Vergleich zu einer anderen Hypothese H') begründet ist. Infolgedessen ist es – ganz im Gegensatz zu der oben zitierten Auffassung von Carnap und Stegmüller – gerade wichtig, „ob die erwähnten Erfahrungsdaten wahr sind oder nicht" und „ob sie dem Sprecher bekannt sind".[28]

[28]Es sei erwähnt, daß Stegmüller in späteren Veröffentlichungen den hier kritisierten Gedankengang teilweise modifiziert hat; man vgl. Stegmüller (1983, S. 809ff.).

Kapitel 4

Aleatorische Wahrscheinlichkeit

In den beiden vorangegangenen Kapiteln haben wir uns mit definiten Hypothesen (über Sachverhalte und Ereignisse) und mit epistemischen Wahrscheinlichkeitsaussagen zur Einschätzung von Begründungen für Hypothesen dieser Art beschäftigt. Demgegenüber beginnt die Wahrscheinlichkeitsrechnung, wie sie auch für die Entwicklung der Statistik einflußreich geworden ist, mit der Annahme, daß „Wahrscheinlichkeit“ als ein metrisierbarer Größenbegriff konzipiert werden kann. Wie wir zeigen möchten, kann diese Annahme begründet werden, wenn man sich auf Zufallsgeneratoren bezieht. Damit beschäftigen wir uns in diesem Kapitel.

4.1 Zufallsgeneratoren

Wir beginnen mit der Frage, wie man Zufallsgeneratoren verstehen kann. Die Darstellung orientiert sich an Überlegungen von P. Lorenzen (1974, S. 209–218, und 1978). Dies betrifft insbesondere den von Lorenzen entwickelten Gedanken, elementare Zufallsgeneratoren zur Konstruktion allgemeiner Zufallsgeneratoren zu verwenden.

4.1.1 Verfahren zur Ereigniserzeugung

1. Man denke an ein Würfelspiel. Man nimmt einen Würfel und kann, indem man ihn wirft, ein Ereignis erzeugen. Das kann man beliebig oft machen. Also kann man das Würfelspiel als ein Verfahren zur Erzeugung von Ereignissen auffassen. Weiterhin kann man sich überlegen, welche Ereignisse möglich sind. Entsprechend den Regeln des Würfelspiels kann beim Wurf eines Würfels genau eines von sechs möglichen Ereignissen auftreten, unterschieden durch die jeweils erzielte Augenzahl. Hier muß man allerdings etwas aufpassen. Einerseits kann man mit einem Würfel beliebig viele Ereignisse erzeugen, andererseits gibt es nur sechs mögliche Ereignisse? Offenbar benötigt man eine sprachliche Unterscheidung. Wir orientieren uns an dem in Abschnitt 2.4 diskutierten Sprachgebrauch und verwenden das Wort ‘Ereignis’ für jeweils einmalige Vorkommnisse im historischen Ablauf des Geschehens. Dementsprechend sagen wir, daß man mit einem Würfel beliebig viele Ereignisse erzeugen kann. Andererseits trifft jedoch für jedes Ereignis genau eine von sechs möglichen Kennzeichnungen zu, nämlich eine Kennzeichnung durch die jeweils erzielte Augenzahl.

2. Jetzt kann man sich überlegen, wie Hypothesen gebildet werden können. Dabei ist eine Unterscheidung wichtig, die bereits in Abschnitt 2.6

besprochen worden ist. Man kann sich einerseits auf Situationen beziehen, in denen Würfelspiele durchgeführt werden. In solchen Situationen können offenbar sehr viele unterschiedliche Ereignisse auftreten. Zum Beispiel kann eine der anwesenden Personen einen Würfel nehmen und werfen, eine andere Person kann über den Ausgang des Wurfes eine Vermutung anstellen, eine dritte Person kann vorschlagen, das Spiel abzubrechen usw. All diese in der Realität möglichen Ereignisse bleiben jedoch außer Betracht, wenn Würfelspiele zur Motivation von Begriffsbildungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung verwendet werden. Die Hypothesen beziehen sich insbesondere nicht darauf, *ob* mit einem Würfel ein Ereignis erzeugt wird. Sie beziehen sich überhaupt nicht unmittelbar auf Situationen, in denen – zum Beispiel – Würfelspiele durchgeführt werden, sondern – in diesem Fall – auf Situationen, die durch Werfen eines Würfels erzeugt werden können. Um das sprachlich zu fassen, hilft die in Kap. 2 eingeführte Notation für Hypothesen. Es wird unterstellt, daß durch das Werfen eines Würfels eine Situation ω erzeugt werden kann, die sich durch eine von sechs Möglichkeiten kennzeichnen läßt. Es gibt also eine Kennzeichnungsmenge, die in diesem Beispiel durch $\tilde{\mathcal{K}} := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ vergegenwärtigt werden kann; und es gibt dementsprechend sechs Hypothesen der Form $\langle \omega, \tilde{k} \rangle$, wobei $\tilde{k} \in \tilde{\mathcal{K}}$ eine der möglichen Kennzeichnungen ist. Hypothesen beziehen sich also auf Aspekte von Situationen, die mit einem Würfel erzeugt werden können, nicht darauf, ob solche Situationen eintreten.

3. Bei dieser Betrachtungsweise ist ω eine jeweils bestimmte Situation im historischen Ablauf des Geschehens. Für Würfelspiele ist jedoch charakteristisch, daß beliebig viele Situationen der gleichen Art erzeugt werden können. Damit ist zweierlei gemeint. Erstens, daß die Situationen – wenn sie erzeugt werden – stets auf die gleiche Art erzeugt werden, wobei die Art der Erzeugung durch ein Verfahren (eine Menge von Regeln) festgelegt wird. In unserem Beispiel bezieht sich das Verfahren darauf, wie der Würfel beschaffen sein soll und wie mit ihm geworfen werden soll. Zweitens ist gemeint, daß die Situationen ausschließlich unter dem Gesichtspunkt betrachtet werden sollen, daß sie sich durch jeweils ein Element der Kennzeichnungsmenge $\tilde{\mathcal{K}}$ charakterisieren lassen. Diese Bedingungen legen nicht nur fest, was unter „Situationen der gleichen Art“ verstanden werden soll; sie legen auch fest, wann zwei Situationen als gleich gelten sollen: nämlich genau dann, wenn es sich um Situationen der gleichen Art handelt und wenn sie durch das gleiche Element der Kennzeichnungsmenge $\tilde{\mathcal{K}}$ charakterisiert werden können.

4. Jetzt kann der *allgemeine Begriff eines Zufallsgenerators* definiert werden. Wir verwenden dafür die Notation

$$\mathcal{G} := (\mathcal{V}, (\mathcal{S}, \tilde{\mathcal{K}}))$$

Der Zufallsgenerator $\mathcal{G}$ besteht aus einem Verfahren $\mathcal{V}$, mit dem beliebig viele Situationen des Typs $(\mathcal{S}, \tilde{\mathcal{K}})$ erzeugt werden können, die ihrerseits durch jeweils genau ein Element einer Kennzeichnungsmenge $\tilde{\mathcal{K}}$ charakterisiert werden können. Außerdem soll gelten: Die Operationsweise des Verfahrens soll nicht davon abhängen, wie und von wem und unter welchen äußeren Umständen das Verfahren praktisch angewendet wird.

5. Die Schreibweise $(\mathcal{S}, \tilde{\mathcal{K}})$ wird verwendet, um auf den Typ der Situationen zu verweisen, die mit dem Zufallsgenerator erzeugt werden können. Die Schreibweise soll es erlauben, daß man sich beim Reden über einen Zufallsgenerator auf eine oder mehrere Situationen dieses Typs beziehen kann. Es sollte jedoch beachtet werden, daß $(\mathcal{S}, \tilde{\mathcal{K}})$ selbst weder eine Situation ist noch auf eine Situation verweist. Situationen, für die wir die Symbole $\omega, \omega_1, \omega_2, \dots$ verwenden, sind stets bestimmte (reale oder vorgestellte) Situationen. Der Ausdruck $(\mathcal{S}, \tilde{\mathcal{K}})$ soll vielmehr dazu dienen, über solche jeweils bestimmten Situationen sprechen zu können. Wir verwenden die Schreibweise

$$\omega \models (\mathcal{S}, \tilde{\mathcal{K}})$$

um damit zum Ausdruck zu bringen, daß ω eine bestimmte (reale oder vorgestellte) Situation des Typs $(\mathcal{S}, \tilde{\mathcal{K}})$ ist.[1]

6. Hat man verstanden, wie $(\mathcal{S}, \tilde{\mathcal{K}})$ als ein Situationstyp zur Charakterisierung jeweils bestimmter Situationen verwendet werden kann, kann man analog auch von Situationen des Typs $(\mathcal{S}, \tilde{K})$ sprechen, wobei $\tilde{K}$ eine beliebige Teilmenge der Kennzeichnungsmenge $\tilde{\mathcal{K}}$ ist. Zu sagen, daß ω eine Situation vom Typ $(\mathcal{S}, \tilde{K})$ ist, soll bedeuten, daß ω eine Situation des Typs $(\mathcal{S}, \tilde{\mathcal{K}})$ ist, die durch irgendein Element von $\tilde{K}$ charakterisiert werden kann.

7. Man sollte sich klarmachen, daß Zufallsgeneratoren Artefakte sind, von Menschen ausgedachte Verfahren, um auf wiederholbare Weise Situationen zu erzeugen, deren mögliche Eigenschaften – soweit sie durch eine Kennzeichnungsmenge vorab fixiert worden sind – nicht sicher vorausgesagt werden können. Die Aussage, daß bei einem Zufallsgenerator nur Situationen eines vorab fixierten Typs $(\mathcal{S}, \tilde{\mathcal{K}})$ auftreten können, ist keine empirische Aussage. Die Aussage bezieht sich vielmehr auf den Sinn des Verfahrens, durch das ein Zufallsgenerator definiert wird. Zum Beispiel können bei einem Würfelspiel zahlreiche Ereignisse auftreten, die durch die Spielregeln nicht vorgesehen sind. Niemand kann garantieren, daß sich Menschen, wenn sie einen Zufallsgenerator zur Erzeugung von Ereignissen verwenden, an die Regeln halten. Und auch wenn ein Zufallsgenerator

[1] Wie schon in Abschnitt 2.6 besprochen worden ist, wird in dieser Arbeit das Symbol $\models$ anstelle der mengentheoretischen Notation $\in$ verwendet, um zu betonen, daß ein Situationstyp nicht sinnvoll als eine Menge möglicher Situationen konzipiert werden kann. Mit einem Zufallsgenerator $(\mathcal{V}, (\mathcal{S}, \tilde{\mathcal{K}}))$ können zwar beliebig viele Situationen des Typs $(\mathcal{S}, \tilde{\mathcal{K}})$ hergestellt werden; aber es gibt kein Verfahren, mit dem sinnvoll eine „Menge aller möglichen Situationen dieses Typs" definiert werden könnte.

durch eine Maschine realisiert wird, zum Beispiel durch einen Computer (etwa in der Form eines Glücksspielautomaten), können Ereignisse eintreten, die dem vorab fixierten Typ $(\mathcal{S}, \tilde{\mathcal{K}})$ nicht entsprechen; z. B. kann ein Computer defekt werden oder es kann ein Stromausfall eintreten.

4.1.2 Elementare Zufallsgeneratoren

1. Eine wichtige Frage ist noch nicht angesprochen worden: *wie* bei einem Zufallsgenerator der Prozeß beschaffen ist, durch den Situationen erzeugt werden können. Zur Diskussion dieser Frage beziehen wir uns auf einen Zufallsgenerator $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, (\mathcal{S}, \tilde{\mathcal{K}}))$ mit der Kennzeichnungsmenge

$$\tilde{\mathcal{K}} := \{\tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_m\}$$

Man kann dann sagen, daß der Zufallsgenerator ein Verfahren ist, um Situationen zu erzeugen, die sich durch jeweils genau ein Element $\tilde{k} \in \tilde{\mathcal{K}}$ charakterisieren lassen. Es kommt also gar nicht auf weitere Aspekte solcher Situationen an, sondern nur darauf, durch welches Element aus der Kennzeichnungsmenge $\tilde{\mathcal{K}}$ sie charakterisiert werden können. Insofern erscheint es möglich, auch bei der Charakterisierung des Verfahrens $\mathcal{V}$, das durch den Zufallsgenerator $\mathcal{G}$ definiert wird, von der Vorstellung auszugehen, daß es sich um einen *Prozeß der Auswahl* eines Elementes aus der Kennzeichnungsmenge $\tilde{\mathcal{K}}$ handelt.

2. Diese Betrachtungsweise erlaubt es, die Frage nach der Funktionsweise von Zufallsgeneratoren so zu formulieren: Wie ist das Verfahren beschaffen, mit dem bei der Betätigung eines Zufallsgenerators jeweils ein Element aus $\tilde{\mathcal{K}}$ ausgewählt wird? Bei *elementaren* Zufallsgeneratoren besteht die leitende Idee darin, das Verfahren so zu gestalten, daß es für jedes Element von $\tilde{\mathcal{K}}$ die „gleiche Chance" gibt, ausgewählt zu werden. Diese Idee wird z. B. verfolgt, wenn man das Werfen von Münzen oder Würfeln als Zufallsgeneratoren verwendet. Für analytische Zwecke am besten geeignet sind Urnen, die mit vollständig symmetrischen Objekten (meistens Kugeln) gefüllt sind, die sich nur durch einen Namen unterscheiden. Soll die Kennzeichnungsmenge eines Zufallsgenerators m verschiedene Elemente enthalten, wird die Urne mit m unterscheidbaren Objekten gefüllt. Das praktische Verfahren besteht darin, die Objekte in der Urne zu mischen und dann ein Objekt aus der Urne blind herauszuziehen; der Name des herausgezogenen Objekts liefert die Kennzeichnung der erzeugten Situation. Schließlich wird das herausgezogene Objekt wieder in die Urne zurückgelegt, um gleiche Ausgangsbedingungen für eine Wiederholung herzustellen.

3. Hat bei diesem Verfahren jedes Objekt in der Urne die gleiche Chance, gezogen zu werden? Die Frage kann in dieser Form nicht sinnvoll beantwortet werden, denn es steht keine unabhängige Definition für „gleiche

Chancen“ zur Verfügung. Die Frage ist vielmehr, wie eine solche Definition gefunden werden kann. Die grundlegende Idee besteht darin, daß man elementare Zufallsgeneratoren verwenden kann, *um zu explizieren*, was mit „gleichen Chancen“ gemeint sein soll. Bei dem Verfahren, das eine Urne verwendet, kann man so argumentieren: Keine der Kugeln wird durch das Auswahlverfahren bevorzugt; und *das* soll damit gemeint sein, daß jede Kugel die gleiche Chance hat, gezogen zu werden.

4. Man sollte sich klarmachen, daß es hier nicht um eine empirische Frage geht, die durch Beobachtungen der mit einem Zufallsgenerator erzeugten Situationen entschieden werden könnte. Sicherlich kann man solche Beobachtungen machen. Man kann einen Zufallsgenerator n-mal betätigen und dann für jedes $\tilde{k} \in \tilde{\mathcal{K}}$ die relative Häufigkeit feststellen, mit der Situationen des Typs $(\mathcal{S}, \tilde{k})$ eingetreten sind. So erhält man die relativen Häufigkeiten

$$h_n(\tilde{k}_j) \qquad (\text{für } j = 1, \ldots, m)$$

Aber wollte man versuchen, die Bedeutung von „gleiche Chancen“ durch die Forderung

$$h_n(\tilde{k}_1) = \cdots = h_n(\tilde{k}_m)$$

zu definieren, würde dies sogleich in eine Sackgasse führen; denn diese Forderung kann gar nicht für beliebige n erfüllt werden.

5. Es sei indessen betont: Das Argument zielt darauf, daß Beobachtungen der mit einem Zufallsgenerator erzeugten Situationen keine Grundlage liefern, um den Sinn eines Redens von „gleichen Chancen“ zu definieren. Empirische Argumente spielen gleichwohl eine wichtige Rolle. Aber sie müssen sich auf die Konstruktion des Zufallsgenerators bzw. auf die zu seiner Verwendung festgelegten Regeln beziehen. Wird zum Beispiel eine Urne verwendet, ist es wichtig, daß die Kugeln vorher *gemischt* werden und daß dann eine der Kugeln *blind* herausgezogen wird. Es sind solche elementaren Symmetrieforderungen, die unser Verständnis von „gleiche Chancen“ begründen; und es ist eine empirische Frage, ob ihnen bei der Konstruktion bzw. Verwendung eines Zufallsgenerators entsprochen worden ist. — Man kann es auch so sagen: Ein elementarer Zufallsgenerator sollte so konstruiert werden, daß sich aus Hinweisen auf seine Konstruktion (einschließlich der Regeln für seinen Gebrauch) keine Argumente gewinnen lassen, mit denen gezeigt werden könnte, daß der Prozeß, durch den Situationen des Typs $(\mathcal{S}, \tilde{\mathcal{K}})$ erzeugt werden, von Eigenschaften abhängt, die nicht allen Elementen $\tilde{k} \in \tilde{\mathcal{K}}$ gleichermaßen zukommen.

6. Die Idee, daß bei einem elementaren Zufallsgenerator Situationstypen $(\mathcal{S}, \tilde{k})$ gleiche Realisierungschancen haben, hat eine wichtige Implikation: Der Zufallsgenerator muß so konstruiert werden, daß das Verfahren $\mathcal{V}$ unabhängig davon funktioniert, ob, wie und von wem es bisher verwendet worden ist. Bei der Verwendung von Urnen wird dies zum Beispiel dadurch erreicht, daß die Kugeln gemischt werden, bevor eine von ihnen herausgezogen wird. Man kann auch sagen, daß das Verfahren keine Erinnerung an frühere Anwendungen haben darf. In dieser Betrachtungsweise sind elementare Zufallsgeneratoren zugleich Verfahren, um auf möglichst perfekte Weise die Idee eines gedächtnislosen Prozesses zu realisieren (im Unterschied zur Idee eines historischen Prozesses).[2]

4.2 Aleatorische Wahrscheinlichkeitsmaße

In diesem Abschnitt wird besprochen, wie Zufallsgeneratoren verwendet werden können, um Wahrscheinlichkeitsmaße zu definieren. Dafür wird zunächst ein elementarer Zufallsgenerator $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, (\mathcal{S}, \tilde{\mathcal{K}}))$ mit der Kennzeichnungsmenge $\tilde{\mathcal{K}} := \{\tilde{k}_1, \ldots, \tilde{k}_m\}$ vorausgesetzt, der also die Eigenschaft hat, daß bei den Situationen, die mit ihm erzeugt werden können, alle Werte aus $\tilde{\mathcal{K}}$ gleich möglich sind.

4.2.1 Motivation der Definition

1. Es soll jetzt ein Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\Pr[\mathcal{G}] : \mathcal{P}(\tilde{K}) \longrightarrow \mathbf{R}$$

konstruiert werden, das jeder Menge $\tilde{K} \subseteq \tilde{\mathcal{K}}$ eine Zahl $\Pr[\mathcal{G}](\tilde{K})$ zuordnet, die als „Grad der Möglichkeit“ für den Situationstyp $(\mathcal{S}, \tilde{K})$ interpretiert werden kann. Dafür steht zunächst der Gedanke zur Verfügung, daß alle m Situationstypen $(\mathcal{S}, \tilde{k}_j)$ gleich möglich sind. Also muß das Wahrscheinlichkeitsmaß folgende Bedingung erfüllen:

$$\Pr[\mathcal{G}](\{\tilde{k}_1\}) = \cdots = \Pr[\mathcal{G}](\{\tilde{k}_m\}) \tag{4.2.1}$$

Qua Konstruktion des Zufallsgenerators steht auch noch eine weitere Überlegung zur Verfügung: daß der Grad der Möglichkeit eines Situationstyps $(\mathcal{S}, \tilde{K})$ nur von der Anzahl der Merkmalswerte in $\tilde{K}$ abhängt. Also muß das Wahrscheinlichkeitsmaß auch folgende Bedingung erfüllen:[3]

$$\Pr[\mathcal{G}](\tilde{K}) = \Pr[\mathcal{G}](\tilde{K}') \iff |\tilde{K}| = |\tilde{K}'| \tag{4.2.2}$$

wobei $\tilde{K}$ und $\tilde{K}'$ beliebige Teilmengen von $\tilde{\mathcal{K}}$ sind. Legt man nun noch fest, daß $\Pr[\mathcal{G}](\tilde{\mathcal{K}}) = 1$ gelten soll, liefern die beiden Bedingungen eine

[2] Es sei angemerkt, daß in der statistischen Praxis auch Computerprogramme verwendet werden, um sog. „Pseudo-Zufallszahlen“ zu erzeugen. Für solche algorithmischen Zufallsgeneratoren gelten natürlich die obigen Ausführungen nicht.

[3] Wenn M irgendeine endliche Menge ist, soll $|M|$ die Anzahl ihrer Elemente bedeuten.

Motivation für folgende Definition:[4]

$$\text{Für alle } \tilde{K} \subseteq \tilde{\mathcal{K}}:\ \Pr[\mathcal{G}](\tilde{K}) := \frac{|\tilde{K}|}{|\tilde{\mathcal{K}}|} \tag{4.2.3}$$

2. Infolge dieser Definition ist $\Pr[\mathcal{G}]$ eine additive Bewertungsfunktion im Sinne der in Abschnitt 3.7.1 gegebenen Definition, d. h. es gilt:

a) $0 \leq \Pr[\mathcal{G}](\tilde{K}) \leq 1$

b) $\Pr[\mathcal{G}](\tilde{\mathcal{K}}) = 1$

c) Wenn $\tilde{K} \cap \tilde{K}' = \emptyset$, dann: $\Pr[\mathcal{G}](\tilde{K} \cup \tilde{K}') = \Pr[\mathcal{G}](\tilde{K}) + \Pr[\mathcal{G}](\tilde{K}')$

Die durch (4.2.3) definierte Funktion wird ein *aleatorisches Wahrscheinlichkeitsmaß* genannt. Es handelt sich um ein spezielles Wahrscheinlichkeitsmaß, das auf der Voraussetzung eines elementaren Zufallsgenerators beruht. In Abschnitt 4.4 wird besprochen, wie aleatorische Wahrscheinlichkeitsmaße konstruiert werden können, die nicht zu einer Gleichverteilung führen.

4.2.2 Aleatorische Wahrscheinlichkeitsaussagen

1. Die eben gegebene Definition eines aleatorischen Wahrscheinlichkeitsmaßes knüpft unmittelbar an eine Idee gleicher Möglichkeiten an, wie sie durch einen elementaren Zufallsgenerator expliziert wird. Insoweit handelt es sich nur darum, einer solchen Idee gleicher Möglichkeiten eine mathematische Ausdrucksform zu geben. Aleatorische Wahrscheinlichkeitsaussagen sind also Aussagen über Möglichkeiten (oder auch „Realisierungschancen“) von Situationen, die mit einem Zufallsgenerator erzeugt werden können. Es sind infolgedessen *keine* Aussagen über relative Häufigkeiten, mit denen Situationen des einen oder anderen Typs eintreten. Es gibt keinen unmittelbaren Zusammenhang zwischen aleatorischen Wahrscheinlichkeiten und relativen Häufigkeiten. „Der Satz, daß das, was gleich möglich ist, auch gleich oft eintreten werde, läßt sich nicht aus der bloßen Voraussetzung herleiten, daß gleich mögliche Fälle vorliegen.“ (Bruns 1906, S. 14) Er läßt sich tatsächlich überhaupt nicht herleiten;[5] und wollte man ihn als ein „Prinzip“ annehmen, wäre es falsch.[6]

[4] Es ist überraschend schwierig, für diese Definition eine überzeugende Begründung zu finden. Einige Überlegungen findet man bei Lorenzen (1978).

[5] Bruns beruft sich stattdessen auf „Erfahrung“; seine Bemerkung geht so weiter: „Unter solchen Umständen bleibt nur übrig, die Begründung des Satzes auf die Aussagen der Erfahrung zu stützen und ihn als eine durch *Induktion* gewonnene Verallgemeinerung *beobachteter* Tatsachen anzusehen.“ Auf diesem Gedanken beruht die sog. frequentistische Wahrscheinlichkeitskonzeption, mit der wir uns in Abschnitt 8.2 beschäftigen.

2. Andererseits handelt es sich bei Aussagen, die mit einem aleatorischen Wahrscheinlichkeitsmaß gemacht werden können, auch nicht um epistemische Wahrscheinlichkeitsaussagen, die sich auf Hypothesen beziehen. Es sind vielmehr Aussagen über Eigenschaften eines Zufallsgenerators. Es ist also wichtig, aleatorische und epistemische Wahrscheinlichkeitsaussagen zu unterscheiden.[7]

3. Eine Verbindung mit epistemischen Wahrscheinlichkeitsaussagen kann jedoch auf einfache Weise hergestellt werden. Denn ein Zufallsgenerator ist ein Verfahren, mit dem sich Situationen erzeugen lassen; und über diese Situationen können Hypothesen gebildet werden. Solche Hypothesen haben die Form $\langle \omega, \tilde{K} \rangle$, wobei $\tilde{K}$ eine Teilmenge der Kennzeichnungsmenge $\tilde{\mathcal{K}}$ des Zufallsgenerators ist. Also kann man durch die Definition

$$\mathrm{P_e}(\langle \omega, \tilde{K} \rangle) := \Pr[\mathcal{G}](\tilde{K}) \tag{4.2.4}$$

auch ein epistemisches Wahrscheinlichkeitsmaß einführen.

[6] Folgende Bemerkung von Fry (1928, S. 82) weist darauf hin: „The reader who has dealt at all with statistics will already have remarked that nothing whatever has been said about the frequency with which an event will happen. It has been said that in tossing a penny heads is ‘equally likely’ to appear as tails; never that ‘heads will appear as often as tails’. The reason is, that the latter statement is not true. Try it and see. It is not even true ‘in the long run’, unless that phrase is given a rather unusual shade of meaning which is dangerously near begging the question. Neither is it true that ‘in a large number of independent runs, heads will as often exceed tails as tails will exceed heads’; for that is merely shifting attention from the event ‘a single throw’ to the event ‘a run’, and weak logic is never made stronger by obfuscation. Again the answer is, ‘Try it and see’.“

[7] Ähnliche Unterscheidungen sind von vielen Autoren vorgeschlagen worden, wobei allerdings ganz unterschiedliche Auffassungen über die beiden Arten von Wahrscheinlichkeit vertreten worden sind. Insbesondere wird oft anstelle eines aleatorischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs eine Deutung durch beobachtbare relative Häufigkeiten vorgeschlagen (damit beschäftigen wir uns in Abschnitt 8.2); auf einige unterschiedliche Auffassungen epistemischer Wahrscheinlichkeiten wurde bereits in Abschnitt 3.7.3 hingewiesen. Folgende Bemerkungen von Braithwaite (1955, S. 120) zeigen die Vielfalt des Sprachgebrauchs: „Many of the philosophers who have recently emphasized the distinction between the two concepts of probability (and these philosophers have held quite different views as to the analyses of the two concepts) have proposed to use different names for the two concepts. Probability in the first sense – probability within a science – has been renamed by Rudolf Carnap *relative frequency*, by Bertrand Russell *mathematical probability* and by William Kneale *chance*. It has also been called *statistical probability* and *empirical probability*. There seem to me to be objections to all these alternative names; so I shall use *probability* without any qualification for probability within a scientific hypothesis. The other sort of probability, which Carnap calls *confirmation*, Russell *credibility* and Kneale *acceptability*, I shall straighforwardly call *reasonableness*, and shall neither call it probability nor suppose that it is a quantity measurable by a number.“ Auch Braithwaite ist hier offenbar der Auffassung, daß epistemische Wahrscheinlichkeit nicht quantifiziert werden kann. Sein terminologischer Vorschlag, von *reasonableness* zu sprechen, paßt auch gut zu unserem Verständnis epistemischer Wahrscheinlichkeit.

4. Durch diese Definition werden die beiden Wahrscheinlichkeitsmaße formal identifiziert; sie haben aber dennoch eine unterschiedliche Bedeutung.[8] Mit dem aleatorischen Wahrscheinlichkeitsmaß $\Pr[\mathcal{G}]$ können Aussagen über einen Zufallsgenerator gemacht werden. Das epistemische Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathrm{P_e}$ soll dagegen dazu dienen, epistemische Wahrscheinlichkeitsaussagen zu begründen, die sich auf Situationen beziehen, die mit dem Zufallsgenerator erzeugt werden können. Das in Abschnitt 3.7.2 erläuterte Argumentationsschema verdeutlicht die intendierte Verwendung:

$$\mathrm{P_e}(\langle\,\omega, \tilde{K}\,\rangle) \leq \mathrm{P_e}(\langle\,\omega, \tilde{K}'\,\rangle) \;\rightsquigarrow\; \langle\,\omega, \tilde{K}\,\rangle \preceq_e \langle\,\omega, \tilde{K}'\,\rangle \tag{4.2.5}$$

Orientiert man sich an diesem Schema, soll das epistemische Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathrm{P_e}$ Argumentationsmöglichkeiten verschaffen, um die Wahrscheinlichkeit von Hypothesen über Situationen, die mit einem Zufallsgenerator erzeugt werden, einschätzbar zu machen.

5. Wie in Abschnitt 3.7.2 überlegt worden ist, liefert ein epistemisches Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathrm{P_e}$ im Kontext des Schemas (4.2.5) stets nur Argumentationsmöglichkeiten, ohne daß ausgeschlossen wird, daß für epistemische Wahrscheinlichkeitsaussagen noch weiteres Wissen über eine Situation relevant werden kann, das in $\mathrm{P_e}$ nicht berücksichtigt worden ist. Wenn man sich auf Situationen bezieht, die durch Zufallsgeneratoren erzeugt werden, liegt jedoch in gewisser Weise ein besonderer Fall vor. Denn durch ihre Konstruktion und durch die Regeln für ihren Gebrauch soll sichergestellt werden, daß für Wahrscheinlichkeitsaussagen *ausschließlich* das Wissen über die Konstruktion des Zufallsgenerators, nicht jedoch irgendein zusätzliches Wissen – weder über die Situationen, die mit ihm erzeugt worden sind oder erzeugt werden können, noch über jeweils spezifische Eigenschaften des aktuellen Kontextes, in dem der Zufallsgenerator aktiviert wird – verwendet werden kann. Insofern erscheint in diesem speziellen Fall die Auffassung begründbar, daß für Wahrscheinlichkeitsaussagen ausschließlich das durch (4.2.4) definierte epistemische Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathrm{P_e}$ verwendet werden sollte.

6. Aber so plausibel diese Auffassung auch erscheinen mag, man sollte sich klarmachen, daß mit ihr der Kontext einer aleatorischen Wahrscheinlichkeitstheorie verlassen und vielmehr eine Rationalitätsnorm formuliert wird. Es handelt sich um einen Vorschlag, wie man vernünftigerweise Wahrscheinlichkeitsaussagen über Hypothesen machen sollte, die sich auf Situationen beziehen, die durch einen Zufallsgenerator erzeugt werden. Wie bereits exemplarisch durch einen Verweis auf J. Bernoulli bemerkt worden ist,

[8] Es sei erwähnt, daß in der Literatur zur Wahrscheinlichkeitstheorie selten eine klare Unterscheidung gemacht wird. Zum Beispiel bezieht sich Bernoulli in seinen Rechnungen stets auf aleatorische Wahrscheinlichkeiten, sagt aber zu Beginn des 4. Teils seiner *Ars conjectandi* (1713/1999, S. 230): „Die Wahrscheinlichkeit ist nämlich ein Grad der Gewissheit und unterscheidet sich von ihr wie ein Theil vom Ganzen."

richtete sich die Intention vieler Autoren, die an der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie mitgewirkt haben, oft darauf, Rationalitätsnormen zu begründen.[9] Tatsächlich vertreten auch heute noch viele Autoren die Auffassung, daß die Wahrscheinlichkeitstheorie Rationalitätsnormen für eine Bewertung von Hypothesen begründen könne; einige Autoren sind sogar der Auffassung, daß Normen für „rationale Entscheidungen" begründet werden können. Aber der Glaube, daß mit den begrifflichen Hilfsmitteln der Wahrscheinlichkeitstheorie Rationalitätsnormen formuliert oder sogar begründet werden könnten, ist sicherlich fragwürdig.[10]

4.2.3 Einwände und Mißverständnisse

1. Die Idee, aleatorische Wahrscheinlichkeitsmaße durch Rückgriff auf Zufallsgeneratoren einzuführen, die eine vorgängige Explikation eines Redens von „gleichen Möglichkeiten" erlauben, erschien in den Anfängen der Wahrscheinlichkeitstheorie weitgehend selbstverständlich. Insofern kann man diesen Gedankengang auch als „klassische" Definition eines quantitativen Wahrscheinlichkeitsbegriffs bezeichnen. Im folgenden sollen einige Einwände und Mißverständnisse besprochen werden, die im Hinblick auf diese Definition aufgetreten sind.[11]

[9] Zur Illustration sei hier eine Bemerkung von Laplace (1814/1932, S. 82f.) angeführt: „Setzen wir den unvermeidlichen Wirkungen des Fortschrittes der Aufklärung keinen nutzlosen und oft gefährlichen Widerstand entgegen; aber wechseln wir nur mit außerordentlicher Behutsamkeit unsere Einrichtungen und Gebräuche, denen wir uns seit langer Zeit angepaßt haben. Wir kennen zwar aus der Erfahrung der Vergangenheit die Übelstände, die sie mit sich bringen, aber wir kennen das Ausmaß der Übel nicht, die eine Abänderung derselben verursachen kann. Bei dieser Unwissenheit schreibt die Wahrscheinlichkeitstheorie vor, jede Veränderung zu unterlassen, namentlich aber plötzliche Änderungen zu vermeiden, die in der moralischen wie physischen Ordnung sich niemals ohne bedeutenden Verlust an lebendiger Kraft vollziehen."

[10] Hier sei noch ein Beispiel erwähnt, an dem man sich die Problematik überlegen kann. Bei Carnap und Stegmüller (1959, S. 10) heißt es: Die induktive Logik „hat nicht nur Verfahren zu konstruieren, um den Bestätigungsgrad von Hypothesen zu beurteilen, sondern auch Regeln für die Vornahme von Schätzungen aufzustellen. [...] Die Gewinnung einer allgemeinen Schätzungsmethode ist nicht nur in theoretischer Hinsicht bedeutsam, sondern vor allem auch für die Frage der Vornahme rationaler Entschlüsse von großer Wichtigkeit. Angenommen, eine im Wirtschaftsleben stehende Person habe zwischen verschiedenen möglichen Handlungen zu wählen. Für jede der Handlungen wird sie versuchen, den vermutlichen Geldgewinn zu schätzen. Falls sie imstande ist, die Bestätigungsgrade aller möglichen Resultate einer in Erwägung gezogenen Handlung zu bestimmen, so kann sie die Summe der Gewinne berechnen, wobei jeder Gewinn mit dem dazugehörigen Bestätigungsgrad zu multiplizieren ist. Das Ergebnis dieser Kalkulation wird dann auf Grund der erwähnten Definition gerade die Schätzung des Gewinnes aus dieser Handlung darstellen. In analoger Weise kann die Person die Schätzungen des Gewinnes für die anderen Handlungen ermitteln. Wenn sie rational vorgehen will, muß sie jene Handlung wählen, für welche der geschätzte Gewinn am größten ist. An diesem Beispiel zeigt sich zugleich die praktisch-ökonomische Funktion der induktiven Logik."

[11] Eine Zusammenstellung der Einwände findet sich bei Gottinger (1980, S. 63f.).

2. Ein erster Einwand richtet sich dagegen, daß man sich mit einem aleatorischen Wahrscheinlichkeitsmaß $\Pr[\mathcal{G}]$ nur auf Situationen beziehen könne, bei denen sinnvoll von „gleichen Möglichkeiten“ gesprochen werden kann. Zum Beispiel heißt es bei R. v. Mises (1957/1981, S. 80):[12]

„Equally possible cases do not always exist, e.g., they are not present in the game with a biased die, or in life insurance. Strictly speaking, the propositions of the classical theory are therefore not applicable to these cases.“

Daran ist richtig, daß sich die Definition von $\Pr[\mathcal{G}]$ *zunächst* auf elementare Zufallsgeneratoren bezieht, die gerade dem Zweck dienen sollen, die Idee *gleicher* Möglichkeiten zu explizieren. Die Konzeption von Zufallsgeneratoren kann jedoch verallgemeinert werden, so daß mit ihrer Hilfe weitgehend beliebige Wahrscheinlichkeitsmaße definiert werden können. Damit werden wir uns in Abschnitt 4.4 beschäftigen.

3. Eher ein Mißverständnis kommt in der folgenden Bemerkung von Moore (1991, S. 334f.) zum Ausdruck:

„You may feel that it is obvious from the balance of a coin that the probability of a head is about 1/2. Such opinions are not always correct. Take a penny and, instead of tossing it, hold it on end on a hard surface with the index finger of one hand and snap it with the other index finger. The coin will spin for several seconds and then fall with either heads or tails showing. A long series of trials reveals that the probability of a head in this random experiment is clearly different from 1/2. Moral: We defined probability *empirically*, that is, in terms of observations. Only by observation can we be reasonably sure of the approximate value of the probability of an outcome.“

Sicherlich wird man Moore darin zustimmen, daß nicht jede beliebige Methode zur Erzeugung von Ereignissen als ein (elementarer) Zufallsgenerator aufgefaßt werden kann. Das liefert jedoch keine Rechtfertigung für Moores Schlußfolgerung. Der wesentliche Punkt ist vielmehr, daß sich *einige* praktische Verfahren angeben lassen, die als Beispiele elementarer Zufallsgeneratoren gelten und mithin zur Explikation eines aleatorischen Wahrscheinlichkeitsmaßes dienen können.

4. An dieser Stelle wird indessen ein Problem sichtbar, auf das bereits in Abschnitt 1.3 im Anschluß an die Ausführungen Bernoullis hingewiesen worden ist. Ein aleatorisches Wahrscheinlichkeitsmaß kann sinnvoll verwendet werden, *wenn* man sich auf einen Zufallsgenerator beziehen kann. Aber wenn das nicht der Fall ist, wenn man es mit Ereignissen zu tun hat, die – in den Worten Bernoullis – „von dem Walten der Natur oder von der Willkür der Menschen abhängen“, ist zunächst ganz unklar, ob und ggf.

[12] Dieser Einwand wird hauptsächlich von Autoren vorgetragen, die eine „Häufigkeitsinterpretation“ des Wahrscheinlichkeitsbegriffs vorschlagen (Abschnitt 8.2); man vgl. auch z. B. die Ausführungen von E. Nagel (1939, S. 45).

wie ein aleatorischer Wahrscheinlichkeitsbegriff sinnvoll angewendet werden könnte. Bernoullis Vorschlag war, in diesen Fällen Wahrscheinlichkeitsaussagen durch empirisch ermittelbare relative Häufigkeiten zu begründen. Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie ist jedoch zunächst nicht dem Vorschlag Bernoullis gefolgt. Stattdessen ist versucht worden, den aleatorischen Wahrscheinlichkeitsbegriff auf spekulative Weise allgemein anwendbar zu machen. Zum Beispiel hat bereits A. de Moivre (1756, S. 1) den Wahrscheinlichkeitsbegriff so definiert:

„The Probability of an Event is greater or less, according to the number of Chances by which it may happen, compared with the whole number of Chances by which it may either happen or fail.“

Einerseits nimmt die Definition in unspezifischer Weise auf beliebige Ereignisse Bezug, andererseits verwendet sie Begriffsbildungen, die nur durch eine Bezugnahme auf Zufallsgeneratoren sinnvoll expliziert werden können. So bleibt schließlich ganz unklar, was man sich unter einer „number of chances“ vorstellen soll.

5. Besonders einflußreich ist eine ganz analog konzipierte Definition geworden, die von P. S. de Laplace in seinem *Essai philosophique sur les probabilités* (1814/1932, S. 4) gegeben worden ist:

„Die Theorie des Zufalls ermittelt die gesuchte Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses durch Zurückführung aller Ereignisse derselben Art auf eine gewisse Anzahl gleich möglicher Fälle, d. s. solcher, über deren Existenz wir in gleicher Weise unschlüssig sind, und durch Bestimmung der dem Ereignis günstigen Fälle. Das Verhältnis dieser Zahl zu der aller möglichen Fälle ist das Mass dieser Wahrscheinlichkeit, die also nichts anderes als ein Bruch ist, dessen Zähler die Zahl der günstigen Fälle und dessen Nenner die Zahl aller möglichen Fälle ist.“

Auch in diesen Ausführungen gibt es keinerlei Bezugnahme auf einen Zufallsgenerator, durch den eine Vorstellung „gleicher Möglichkeiten“ expliziert werden könnte. Stattdessen wird suggeriert, daß eine solche Vorstellung bei Ereignissen beliebiger Art sinnvoll gebildet werden kann.

6. Infolge der Definitionen von Moivre und Laplace ist der „klassische“ aleatorische Wahrscheinlichkeitsbegriff weitgehend aufgelöst und mit einem fragwürdigen Prinzip vermischt worden, das in der Geschichte der Philosophie unter dem Namen „Prinzip des unzureichenden Grundes“ diskutiert und kritisiert worden ist.[13] Das Prinzip besagt, daß man berechtigt sei, zwei oder mehr Ereignisse (oder Sachverhalte) schon dann für „gleich möglich“ zu halten, wenn man keinen Grund angeben kann, daß eines der Ereignisse „eher möglich“ sei als ein anderes, oder in der oben zitierten

[13] Es wurde bereits in der Antike diskutiert, vgl. Makin (1993). Ausführliche historische Ausführungen finden sich bei Keynes (1921), der von einem „principle of indifference“ spricht.

Formulierung von Laplace: wenn man über die Ereignisse „in gleicher Weise unschlüssig“ ist. Man kann allerdings bezweifeln, daß dieses „Prinzip des unzureichenden Grundes“ eine tragfähige Grundlage für Wahrscheinlichkeitsaussagen liefern kann. In prägnanter Weise hat das Leslie Ellis bereits 1842 so gesagt: „Mere ignorance is no ground for any inference whatever. *Ex nihilo nihil.*“[14] Diese Kritik wurde dann vor allem von J. von Kries (1886) ausgearbeitet und später von vielen anderen Autoren unterstützt.[15]

7. Durch die Vermengung der „klassischen“ Definition eines aleatorischen Wahrscheinlichkeitsmaßes mit dem „Prinzip des unzureichenden Grundes“ sind in der Geschichte der Wahrscheinlichkeitstheorie viele Unklarheiten entstanden;[16] noch bedauerlicher ist, daß infolgedessen auch die Begründung des aleatorischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs durch eine explizite Konzeption von Zufallsgeneratoren unklar gemacht worden ist. Zwar ist es in der Lehrbuchliteratur bis heute üblich, einen quantitativen Wahrscheinlichkeitsbegriff durch Hinweise auf Glücksspiele und Zufallsgeneratoren zu motivieren. In der neueren Literatur wird aber die „klassische“ Definition meistens nicht explizit entwickelt, sondern stattdessen auf Laplace und das „Prinzip des unzureichenden Grundes“ verwiesen, um schließlich eine frequentistische Wahrscheinlichkeitsdeutung als eine vergleichweise sinnvolle Alternative darzustellen. Ob es sich um eine sinnvolle Alternative handelt, werden wir in Abschnitt 8.2 untersuchen. Hier soll nur noch einmal betont werden, daß der aleatorische Wahrscheinlichkeitsbegriff vor allem deshalb interessant ist, weil er sich nicht auf relative Häufigkeiten, sondern auf Konstruktionsprinzipien von Zufallsgeneratoren stützt. Wie später gezeigt werden soll, wird es auch erst dadurch möglich, einen einsichtigen Zusammenhang zwischen aleatorischen Wahrscheinlichkeiten und relativen Häufigkeiten herzustellen.

8. An dieser Stelle setzt indessen ein weiteres Mißverständnis ein, auf das kurz hingewiesen werden soll. Es äußert sich in dem Vorwurf, daß die „klassische“ Definition des aleatorischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs zirkulär sei, weil sie „gleich wahrscheinlich“ durch „gleich möglich“ definiere.[17] In gewisser Weise ist diese Feststellung durchaus zutreffend. Der

[14]Zitiert bei Keynes (1921, S. 85).

[15]Eine gute Übersicht über die Diskussion findet sich bei Czuber (1923, Kap. II). Es sei erwähnt, daß das „Prinzip des unzureichenden Grundes“ nicht immer nur im Sinne eines Nicht-Wissens interpretiert wird, sondern von einigen Autoren auch mit begründbaren Symmetrieannahmen verknüpft wird. In dieser Weise hat schon Kries (1886) versucht, eine begründbare Variante des Prinzips zu verteidigen. Neuere Überlegungen, die die gleiche Intention verfolgen, finden sich bei Struik (1934), Lucas (1970, Kap. VII) sowie Bartha und Johns (2001).

[16]Eine ausführliche Diskussion solcher Unklarheiten und Zweideutigkeiten findet man bei Hacking (1971).

[17]Zum Beispiel spricht R. v. Mises (1931, S. 3) von einer „petitio principii [. . .], da

aleatorische Wahrscheinlichkeitsbegriff gewinnt seine Bedeutung durch ein vorgängiges Verständnis der Bedeutung „gleicher Möglichkeiten“; „gleich wahrscheinlich“ wird durch „gleich möglich“ definiert und hat mithin die gleiche Bedeutung. Dennoch ist es ein Mißverständnis, hierin eine zirkuläre Definition zu sehen. Denn folgt man der „klassischen“ Vorgehensweise, kann ja gerade durch eine Bezugnahme auf operativ herstellbare Zufallsgeneratoren erklärt werden, was mit „gleich möglich“ gemeint sein soll. Es ist diese Fundierung in praktisch herstellbaren Zufallsgeneratoren, die den Begriffsbildungen der aleatorischen Wahrscheinlichkeitsrechnung einen ausweisbaren Sinn gibt.

4.3 Zufallsvariablen

Ein wichtiges formales Hilfsmittel zur Ausarbeitung von Begriffsbildungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung sind sog. Zufallsvariablen. In den folgenden Abschnitten besprechen wir den Begriff und verbinden ihn mit Vorstellungen über Zufallsgeneratoren.

4.3.1 Definition von Zufallsvariablen

1. Wir beziehen uns auf einen Zufallsgenerator $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, (\mathcal{S}, \tilde{\mathcal{K}}))$. Ist dieser Ausgangspunkt gegeben, kann man eine Zufallsvariable als eine Funktion

$$\dot{X} : \tilde{\mathcal{K}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{X}}$$

definieren, die jedem Element $\tilde{k}$ der Kennzeichnungsmenge $\tilde{\mathcal{K}}$ einen Wert $\dot{X}(\tilde{k}) \in \tilde{\mathcal{X}}$ zuordnet. In dieser Formulierung ist $\tilde{\mathcal{X}}$ der Merkmalsraum, innerhalb dessen die Zufallsvariable $\dot{X}$ ihre Werte annehmen kann; und wie bei statistischen Variablen nehmen wir auch für Zufallsvariablen an, daß für den Merkmalsraum stets eine numerische Repräsentation zur Verfügung steht: $\dot{X} : \tilde{\mathcal{K}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{X}} \subseteq \mathbf{R}$. Wir nehmen also an, daß die Merkmalsräume von Zufallsvariablen stets in die Menge der reellen Zahlen „eingebettet“ sind.[18]

2. Insofern gibt es eine formale Analogie zwischen Zufallsvariablen und statistischen Variablen. Es ist allerdings wichtig, die beiden Begriffsbildungen zu unterscheiden, und wir verwenden deshalb unterschiedliche Notationen (Zufallsvariablen werden zur Unterscheidung durch einen Punkt kenntlich gemacht). Eine statistische Variable ist eine Funktion

$$X : \Omega \longrightarrow \tilde{\mathcal{X}}$$

‘gleichmöglich’ doch nur ein Deckwort für gleichwahrscheinlich sein kann.“ Den gleichen Einwand formuliert auch Nagel (1939, S. 46).

[18]Eine ausführliche Diskussion findet man bei Rohwer und Pötter 2001, S. 49ff. und 2002, S. 53ff.

die sich auf eine Menge Ω bezieht, deren Elemente (fiktive) Namen für in unserer Erfahrungswelt gegebene oder vorstellbare Situationen (oder Objekte) sind. Jeder Situation $\omega \in \Omega$ wird durch eine solche Variable ein bestimmter Merkmalswert $X(\omega)$ in einem Merkmalsraum $\tilde{\mathcal{X}}$ zugeordnet. Dagegen beziehen sich Zufallsvariablen auf die Elemente einer Kennzeichnungsmenge $\tilde{\mathcal{K}}$, und sie haben infolgedessen zunächst überhaupt keinen Bezug zu realen Phänomenen. Ein solcher Bezug kommt nur indirekt dadurch zustande, daß die Elemente oder Teilmengen von $\tilde{\mathcal{K}}$ zur Bildung von Hypothesen über Ereignisse oder Sachverhalte verwendet werden können. Diese Hypothesen haben die Form $\langle \omega, \tilde{K} \rangle$, wobei ω eine reale oder vorgestellte Situation und $\tilde{K}$ ein Element oder eine Teilmenge der Kennzeichnungsmenge $\tilde{\mathcal{K}}$ ist. Kann man sich dann auf eine Zufallsvariable $\dot{X}$ beziehen, die für diese Kennzeichnungsmenge definiert ist, kann man auch sie verwenden, um Hypothesen über Situationen zu formulieren.

3. Werden zur Formulierung von Hypothesen Zufallsvariablen verwendet, bezieht man sich nicht unmittelbar auf die Kennzeichnungsmenge $\tilde{\mathcal{K}}$, sondern auf den Merkmalsraum (Wertebereich) der Zufallsvariablen, also in der oben verwendeten Notation auf den Merkmalsraum $\tilde{\mathcal{X}}$, wenn $\dot{X}$ der Name der Zufallsvariablen ist. Mit jeder Teilmenge $\tilde{X} \subseteq \tilde{\mathcal{X}}$ kann dann eine entsprechende Hypothese formuliert werden: daß die Zufallsvariable $\dot{X}$ bei einer Situation ω einen Wert in $\tilde{X}$ annimmt. Ob eine solche Hypothese zutrifft oder nicht, hängt natürlich davon ab, welcher Wert in der Kennzeichnungsmenge $\tilde{\mathcal{K}}$ realisiert wird. Also kann man die Formulierung von Hypothesen mit Hilfe von Zufallsvariablen in der folgenden Weise auf die bisher verwendeten Formulierungen für Hypothesen zurückführen:

$$\langle \omega, \tilde{X} \rangle := \langle \omega, \{\tilde{k} \in \tilde{\mathcal{K}} \,|\, \dot{X}(\tilde{k}) \in \tilde{X}\} \rangle \tag{4.3.1}$$

wobei $\tilde{X}$ eine beliebige Teilmenge aus dem Merkmalsraum $\tilde{\mathcal{X}}$ ist.[19]

4. Die begriffliche Verknüpfung von Zufallsvariablen mit Zufallsgeneratoren kann schließlich verwendet werden, um auch für Zufallsvariablen aleatorische Wahrscheinlichkeitsmaße zu definieren. Hat man nämlich für den Zufallsgenerator ein aleatorisches Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\Pr[\mathcal{G}] : \mathcal{P}(\tilde{K}) \longrightarrow \mathbf{R}$$

eingeführt, kann man ganz entsprechend auch eine Funktion

$$\Pr[\dot{X}] : \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{X}}) \longrightarrow \mathbf{R}$$

[19] Gelegentlich werden auch noch andere Formulierungen verwendet, zum Beispiel:

$$\langle \omega, \dot{X} \in \tilde{X} \rangle := \langle \omega, \tilde{X} \rangle \quad \text{oder} \quad \langle \omega, \dot{X} = \tilde{x} \rangle := \langle \omega, \{\tilde{x}\} \rangle$$

Auch wird manchmal die Formulierung $\dot{X}^{-1}(\tilde{X}) := \{\tilde{k} \in \tilde{\mathcal{K}} \,|\, \dot{X}(\tilde{k}) \in \tilde{X}\}$ verwendet, um sich auf einfache Weise auf das Urbild einer Menge $\tilde{X}$ zu beziehen.

durch $\Pr[\dot{X}](\tilde{X}) := \Pr[\mathcal{G}](\dot{X}^{-1}(\tilde{X}))$ definieren. Eine aleatorische Wahrscheinlichkeit für Mengen im Merkmalsraum von $\dot{X}$ wird dadurch auf eine vorgängig definierte aleatorische Wahrscheinlichkeit für Teilmengen der Kennzeichnungsmenge eines Zufallsgenerators zurückgeführt. Infolge dieser Definition ist $\Pr[\dot{X}]$ ebenfalls eine additive Bewertungsfunktion und hat also die für ein Wahrscheinlichkeitsmaß erforderlichen formalen Eigenschaften. $\Pr[\dot{X}]$ wird deshalb als ein *Wahrscheinlichkeitsmaß für die Zufallsvariable* $\dot{X}$ oder auch als *Wahrscheinlichkeitsverteilung* von $\dot{X}$ bezeichnet. Im allgemeinen sind natürlich $\Pr[\dot{X}]$ und $\Pr[\mathcal{G}]$ nicht identisch.

5. Der Sinn dieser Begriffsbildungen wird deutlich, wenn man Zufallsvariablen verwendet, um Hypothesen über Situationen zu formulieren, die mit Hilfe von Zufallsgeneratoren erzeugt werden können. Die argumentative Verknüpfung erfolgt so, wie dies in Abschnitt 4.2.2 bereits für Hypothesen der Form $\langle \omega, \tilde{K} \rangle$ besprochen worden ist. Dort wurde die Definition

$$\mathrm{P_e}(\langle \omega, \tilde{K} \rangle) := \Pr[\mathcal{G}](\tilde{K}) \tag{4.3.2}$$

verwendet, um ein epistemisches Wahrscheinlichkeitsmaß für Hypothesen zu definieren. Ein epistemisches Wahrscheinlichkeitsmaß für Hypothesen, die mit Hilfe einer Zufallsvariablen formuliert werden, folgt dann aus (4.3.1), nämlich

$$\mathrm{P_e}(\langle \omega, \tilde{X} \rangle) = \mathrm{P_e}(\langle \omega, \dot{X}^{-1}(\tilde{X}) \rangle)$$

Man findet dann auch einen zu (4.3.2) analogen Zusammenhang für Zufallsvariablen, nämlich $\mathrm{P_e}(\langle \omega, \tilde{X} \rangle) = \Pr[\dot{X}](\tilde{X})$.

6. In den bisherigen Erläuterungen sind wir davon ausgegangen, daß Zufallsvariablen durch vorgängig einzuführende Zufallsgeneratoren definiert werden sollten. Obwohl das bei einer rein formalen Betrachtungsweise nicht unbedingt erforderlich ist, hilft dies für ein Verständnis, insbesondere wenn davon gesprochen wird, daß Zufallsvariablen ihre Werte mit gewissen Wahrscheinlichkeiten annehmen. Zufallsvariablen können auch *zur Repräsentation* von Zufallsgeneratoren verwendet werden, indem man die Kennzeichnungsmenge eines Zufallsgenerators als Wertebereich einer Zufallsvariablen auffaßt. Man verwendet dann zur Definition der Zufallsvariablen einfach eine identische Abbildung auf der Kennzeichnungsmenge des Zufallsgenerators, also eine Abbildung

$$\dot{X} : \tilde{\mathcal{K}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{K}}$$

die durch $\dot{X}(\tilde{k}) = \tilde{k}$ definiert ist. Somit kann man Zufallsgeneratoren auch als Verfahren zur Konstruktion von Zufallsvariablen auffassen. Soweit es in den folgenden Abschnitten nur um die Entwicklung eines formalen Begriffsrahmens geht, wird von dieser Korrespondenz zwischen Zufallsvariablen und Zufallsgeneratoren zur Vereinfachung der Redeweisen oft Gebrauch gemacht.

7. So wie bei statistischen Variablen ist es auch bei Zufallsvariablen oft sinnvoll, ihren Merkmalsraum explizit durch eine Kombination mehrerer einzelner Merkmalsräume zu konzipieren. Der Merkmalsraum einer Zufallsvariablen $\dot{X}$ hat dann die Darstellung $\tilde{\mathcal{X}} = \tilde{\mathcal{X}}_1 \times \cdots \times \tilde{\mathcal{X}}_m$. In dieser Schreibweise setzt sich der Merkmalsraum $\tilde{\mathcal{X}}$ aus m Komponenten (Teilmerkmalsräumen) zusammen. Dementsprechend besteht auch die Zufallsvariable $\dot{X}$ aus m Komponenten und kann in der Form

$$\dot{X} \;=\; (\dot{X}_1, \ldots, \dot{X}_m)$$

ausgedrückt werden. Explizit als Abbildung geschrieben hat man schließlich die Darstellung

$$(\dot{X}_1, \ldots, \dot{X}_m) : \tilde{\mathcal{K}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{X}}_1 \times \cdots \times \tilde{\mathcal{X}}_m$$

Man spricht von einer *m-dimensionalen Zufallsvariablen*. Jedem Element $\tilde{k}$ aus der Kennzeichnungsmenge $\tilde{\mathcal{K}}$ wird ein Wert $\dot{X}(\tilde{k})$ im Merkmalsraum $\tilde{\mathcal{X}}$ zugeordnet, der aus m Einzelwerten besteht:

$$\dot{X}(\tilde{k}) \;=\; (\dot{X}_1(\tilde{k}), \ldots, \dot{X}_m(\tilde{k}))$$

Jede Komponente $\dot{X}_j(\tilde{k})$ nimmt einen Wert im entsprechenden Teilmerkmalsraum $\tilde{\mathcal{X}}_j$ an.

4.3.2 Funktionen von Zufallsvariablen

1. Weitere Möglichkeiten zur Begriffsbildung können dadurch gewonnen werden, daß man Funktionen von Zufallsvariablen betrachtet. Im einfachsten Fall gibt es zum Beispiel eine Zufallsvariable $\dot{X}$ mit dem Merkmalsraum $\tilde{\mathcal{X}}$ und eine Funktion $g : \tilde{\mathcal{X}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{Y}}$, die jedem Merkmalswert in $\tilde{\mathcal{X}}$ einen Wert in einem neuen Merkmalsraum $\tilde{\mathcal{Y}}$ zuordnet. Dann kann eine neue Zufallsvariable $\dot{Y} : \tilde{\mathcal{K}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{Y}}$ gebildet werden, deren Werte durch die Festsetzung $\dot{Y}(\tilde{k}) := g(\dot{X}(\tilde{k}))$ zustande kommen. $\dot{Y}$ ist dann eine Funktion von $\dot{X}$, wofür zur Abkürzung auch $\dot{Y} = g(\dot{X})$ geschrieben werden kann.

2. Als Funktion von $\dot{X}$ ist dann auch $\dot{Y}$ eine Zufallsvariable. Ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung wird in der folgenden Weise durch die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $\dot{X}$ induziert:

$$\Pr[\dot{Y}](\tilde{Y}) \;=\; \Pr[\dot{X}](g^{-1}(\tilde{Y})) \;=\; \Pr[\mathcal{G}](X^{-1}(g^{-1}(\tilde{Y})))$$

wobei $\tilde{Y}$ eine beliebige Teilmenge des Merkmalsraums $\tilde{\mathcal{Y}}$ ist.

3. Wichtig sind insbesondere Funktionen mehrdimensionaler Zufallsvariablen. Ausgangspunkt ist dann eine m-dimensionale Zufallsvariable $\dot{X} = (\dot{X}_1, \ldots, \dot{X}_m)$ und eine Funktion $g : \tilde{\mathcal{X}}_1 \times \cdots \times \tilde{\mathcal{X}}_m \longrightarrow \tilde{\mathcal{Y}}$, die jedem Wert aus dem Merkmalsraum $\tilde{\mathcal{X}} = \tilde{\mathcal{X}}_1 \times \cdots \times \tilde{\mathcal{X}}_m$ einen Wert in dem neuen Merkmalsraum $\tilde{\mathcal{Y}}$ zuordnet. Dann können die Werte einer neuen Zufallsvariablen $\dot{Y}$ durch $\dot{Y}(\tilde{k}) := g(\dot{X}_1(\tilde{k}), \ldots, \dot{X}_m(\tilde{k}))$ gebildet werden.

4.3.3 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

1. Schließlich muß noch der wichtige Begriff eines bedingten Wahrscheinlichkeitsmaßes besprochen werden. Dafür wird angenommen, daß man sich auf einen Zufallsgenerator $\mathcal{G}$ beziehen kann, der durch eine Zufallsvariable $\dot{X}$ mit dem Wertebereich $\tilde{\mathcal{X}}$ repräsentiert wird und für den es ein aleatorisches Wahrscheinlichkeitsmaß $\Pr[\dot{X}]$ gibt, um für alle Teilmengen $\tilde{X} \subseteq \tilde{\mathcal{X}}$ Aussagen der Form $\Pr[\dot{X}](\tilde{X})$ machen zu können. Sei nun $\tilde{X}'$ eine weitere Teilmenge von $\tilde{\mathcal{X}}$. Der Ausdruck $\Pr[\dot{X}](\tilde{X} \cap \tilde{X}')$ gibt dann an, mit welcher Wahrscheinlichkeit $\dot{X}$ einen Wert annimmt, der sowohl in $\tilde{X}$ als auch in $\tilde{X}'$ liegt. Kann jetzt vorausgesetzt werden, daß $\Pr[\dot{X}](\tilde{X}') > 0$ ist, kann man folgende Definition vornehmen:

$$\Pr[\dot{X} \mid \dot{X} \in \tilde{X}'](\tilde{X}) \;:=\; \frac{\Pr[\dot{X}](\tilde{X} \cap \tilde{X}')}{\Pr[\dot{X}](\tilde{X}')} \tag{4.3.3}$$

Dieser Ausdruck wird die *bedingte Wahrscheinlichkeit* von $\tilde{X}$ unter der Bedingung $\dot{X} \in \tilde{X}'$ genannt.

2. Die Definition (4.3.3) kann verwendet werden, um ein neues Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\Pr[\dot{X} \mid \dot{X} \in \tilde{X}'] : \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{X}}) \longrightarrow \mathbf{R}$$

zu bilden, das jeder Teilmenge $\tilde{X} \subseteq \tilde{\mathcal{X}}$ ihre durch (4.3.3) definierte bedingte Wahrscheinlichkeit zuordnet. Offenbar handelt es sich um ein Wahrscheinlichkeitsmaß, denn es genügt allen dafür erforderlichen Regeln. Es wird ein *bedingtes Wahrscheinlichkeitsmaß* (unter der Bedingung $\dot{X} \in \tilde{X}'$) genannt.

3. Zur Motivation der Begriffsbildungen kann man daran denken, daß mit einem aleatorischen Wahrscheinlichkeitsmaß epistemische Wahrscheinlichkeitsaussagen über Hypothesen begründet werden sollen, die sich auf Situationen beziehen, die durch den Zufallsgenerator erzeugt werden können. Bezieht man sich auf eine Hypothese $\langle\, \omega, \tilde{X} \,\rangle$, liefert $\Pr[\dot{X}]$ zunächst die Wahrscheinlichkeit $\mathrm{P_e}(\langle\, \omega, \tilde{X} \,\rangle) = \Pr[\dot{X}](\tilde{X})$. Die epistemische Wahrscheinlichkeit hängt jedoch davon ab, welche Informationen über die Situation ω verfügbar sind. $\Pr[\dot{X}](\tilde{X})$ liefert ein sinnvolles Maß für die epistemische Wahrscheinlichkeit, wenn man nur weiß, daß die Situation ω durch den Zufallsgenerator erzeugt worden ist. Sie verändert sich aber, wenn man zum Beispiel weiß, daß die Zufallsvariable $\dot{X}$ in der Situation ω einen Wert in der Merkmalsmenge $\tilde{X}'$ angenommen hat. Dann liefert $\Pr[\dot{X} \mid \dot{X} \in \tilde{X}'](\tilde{X})$ ein sinnvolles Maß für die epistemische Wahrscheinlichkeit $\mathrm{P_e}(\langle\, \omega, \tilde{X} \,\rangle)$.

4. Den Bedingungen $\dot{X} \in \tilde{X}'$ entsprechen Teilmengen der Kennzeichnungsmenge $\tilde{\mathcal{K}}$, nämlich $\dot{X}^{-1}(\tilde{X}')$. Solche Teilmengen lassen sich oft bequem durch eine weitere Zufallsvariable angeben. Ist $(\dot{X}_1, \dot{X}_2)$ eine zweidimensionale Zufallsvariable mit dem Merkmalsraum $\tilde{\mathcal{X}}_1 \times \tilde{\mathcal{X}}_2$, definiert man für

Teilmengen $\tilde{X}_1 \subseteq \tilde{\mathcal{X}}_1$ und $\tilde{X}_2 \subseteq \tilde{\mathcal{X}}_2$ mit $\Pr[\dot{X}_2](\tilde{X}_2) > 0$

$$\Pr[\dot{X}_1 \,|\, \dot{X}_2 \in \tilde{X}_2](\tilde{X}_1) := \frac{\Pr[(\dot{X}_1, \dot{X}_2)](\tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2)}{\Pr[\dot{X}_2](\tilde{X}_2)}$$

und nennt diesen Ausdruck die bedingte Wahrscheinlichkeit von $\dot{X}_1 \in \tilde{X}_1$ unter der Bedingung $\dot{X}_2 \in \tilde{X}_2$.

5. Schließlich sollen noch drei Regeln besprochen werden, die für das Rechnen mit bedingten Wahrscheinlichkeiten oft hilfreich sind. Eine erste Regel lautet: Wenn $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2 \subseteq \tilde{X}$ zwei Merkmalsmengen sind und außerdem auch $\Pr[\dot{X}](\tilde{X}_2) > 0$ bzw. $\Pr[\dot{X}](\tilde{X}_1) > 0$ ist, dann erhält man:

$$\begin{aligned}\Pr[\dot{X}](\tilde{X}_1 \cap \tilde{X}_2) &= \Pr[\dot{X} \,|\, \dot{X} \in \tilde{X}_2)](\tilde{X}_1) \Pr[\dot{X}](\tilde{X}_2) \\ &= \Pr[\dot{X} \,|\, \dot{X} \in \tilde{X}_1)](\tilde{X}_2) \Pr[\dot{X}](\tilde{X}_1)\end{aligned}$$

Entsprechend erhält man für eine 2-dimensionale Zufallsvariable $(\dot{X}_1, \dot{X}_2)$ mit $\Pr[\dot{X}_1](\tilde{X}_1) > 0$ bzw. $\Pr[\dot{X}_2](\tilde{X}_2) > 0$:

$$\begin{aligned}\Pr[(\dot{X}_1, \dot{X}_2)](\tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2) &= \Pr[\dot{X}_1 \,|\, \dot{X}_2 \in \tilde{X}_2](\tilde{X}_1) \Pr[\dot{X}_2](\tilde{X}_2) \\ &= \Pr[\dot{X}_2 \,|\, \dot{X}_1 \in \tilde{X}_1](\tilde{X}_2) \Pr[\dot{X}_1](\tilde{X}_1)\end{aligned}$$

6. Eine zweite Regel geht von Merkmalsmengen $\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_m \subseteq \tilde{X}$ aus, die paarweise disjunkt sind und für die außerdem $\Pr[\dot{X}](\tilde{X}_j) > 0$ gilt. Weiterhin sei eine Menge $\tilde{X} \subseteq \tilde{X}_1 \cup \ldots \cup \tilde{X}_m$ gegeben. Dann findet man zunächst

$$\tilde{X} = \tilde{X} \cap (\tilde{X}_1 \cup \ldots \cup \tilde{X}_m) = (\tilde{X} \cap \tilde{X}_1) \cup \ldots \cup (\tilde{X} \cap \tilde{X}_m)$$

und daraus folgt die Regel

$$\begin{aligned}\Pr[\dot{X}](\tilde{X}) &= \sum_{j=1}^{m} \Pr[\dot{X}](\tilde{X} \cap \tilde{X}_j) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \Pr[\dot{X} \,|\, \dot{X} \in \tilde{X}_j](\tilde{X}) \Pr[\dot{X}](\tilde{X}_j)\end{aligned}$$

Diese Regel wird von einigen Autoren *Satz über die vollständige Wahrscheinlichkeit* genannt. Ist insbesondere $(\dot{X}_1, \dot{X}_2)$ eine zweidimensionale Zufallsvariable mit $\Pr[\dot{X}_2](\{\tilde{x}_2\}) > 0$ für alle $\tilde{x}_2 \in \tilde{\mathcal{X}}_2$, erhält man

$$\begin{aligned}\Pr[\dot{X}_1](\tilde{X}_1) &= \sum_{\tilde{x}_2 \in \tilde{\mathcal{X}}_2} \Pr[(\dot{X}_1, \dot{X}_2)](\tilde{X}_1 \times \{\tilde{x}_2\}) \\ &= \sum_{\tilde{x}_2 \in \tilde{\mathcal{X}}_2} \Pr[\dot{X}_1 \,|\, \dot{X}_2 = \tilde{x}_2](\tilde{X}_1) \Pr[\dot{X}_2](\{\tilde{x}_2\})\end{aligned}$$

7. Eine dritte Regel verwendet die gleichen Voraussetzungen wie die zweite Regel und zusätzlich $\Pr[\dot{X}](\tilde{X}) > 0$. Unter diesen Voraussetzungen findet man zunächst:

$$\begin{aligned}\Pr[\dot{X} \,|\, \dot{X} \in \tilde{X}](\tilde{X}_i) &= \frac{\Pr[\dot{X}](\tilde{X}_i \cap \tilde{X})}{\Pr[\dot{X}](\tilde{X})} \\ &= \frac{\Pr[\dot{X} \,|\, \dot{X} \in \tilde{X}_i](\tilde{X}) \Pr[\dot{X}](\tilde{X}_i)}{\Pr[\dot{X}](\tilde{X})}\end{aligned}$$

Verwendet man zur Darstellung des Nenners den oben angegebenen Satz über die vollständige Wahrscheinlichkeit, erhält man

$$\Pr[\dot{X} \,|\, \dot{X} \in \tilde{X}](\tilde{X}_i) = \frac{\Pr[\dot{X} \,|\, \dot{X} \in \tilde{X}_i](\tilde{X}) \Pr[\dot{X}](\tilde{X}_i)}{\sum_{j=1}^{m} \Pr[\dot{X} \,|\, \dot{X} \in \tilde{X}_j](\tilde{X}) \Pr[\dot{X}](\tilde{X}_j)}$$

Diese Regel wird *Satz von Bayes* genannt.

4.4 Allgemeine Zufallsgeneratoren

Bisher wurden nur elementare Zufallsgeneratoren explizit eingeführt und als Ausgangspunkt zur Definition eines aleatorischen Wahrscheinlichkeitsmaßes verwendet. In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, wie man auf konstruktive Weise zu allgemeinen Zufallsgeneratoren gelangen kann.

4.4.1 Verwendung von Zufallsvariablen

1. Ausgangspunkt ist ein elementarer Zufallsgenerator $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, (\mathcal{S}, \tilde{\mathcal{K}}))$. Jede Funktion $g : \tilde{\mathcal{K}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{X}}$, die die Elemente von $\tilde{\mathcal{K}}$ in einen neuen Merkmalsraum $\tilde{\mathcal{X}}$ abbildet, kann verwendet werden, um einen neuen Zufallsgenerator $\mathcal{G}_g := (\mathcal{V}, (\mathcal{S}, \tilde{\mathcal{X}}))$ zu definieren, dessen Kennzeichnungsmenge aus dem neuen Merkmalsraum $\tilde{\mathcal{X}}$ besteht. Dieser neue Zufallsgenerator kann durch eine Zufallsvariable $\dot{X} : \tilde{\mathcal{K}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{X}}$ repräsentiert werden, die durch $\dot{X}(\tilde{k}) := g(\tilde{k})$ definiert ist. Ist $\Pr[\mathcal{G}]$ das zunächst für den Zufallsgenerator $\mathcal{G}$ definierte Wahrscheinlichkeitsmaß, erhält man durch

$$\Pr[\mathcal{G}_g](\tilde{X}) := \Pr[\mathcal{G}](g^{-1}(\tilde{X})) \qquad (4.4.1)$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß für $\mathcal{G}_g$.

2. Der Gedankengang zeigt, wie man ausgehend von einem elementaren Zufallsgenerator neue Zufallsgeneratoren konstruieren kann. Faßt man Zufallsgeneratoren als Verfahren zur Konstruktion von Zufallsvariablen auf, wird deutlich, wie man Zufallsvariablen mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen bilden kann. Möchte man eine Zufallsvariable $\dot{X}$ mit einer beliebig vorgegebenen Wahrscheinlichkeitsverteilung konstruieren, ist es nur erforderlich, eine Funktion g zu ermitteln, die den Wertebereich eines elementaren Zufallsgenerators in den Merkmalsraum von $\dot{X}$ abbildet und so beschaffen ist, daß die Gleichung (4.4.1) erfüllt wird.

3. Wie man das praktisch machen kann, hängt davon ab, welche technischen Hilfsmittel zur Konstruktion eines elementaren Zufallsgenerators zur Verfügung stehen. Hier verwenden wir zur Illustration eine Urne, die mit Kugeln gefüllt wird. Angenommen, man möchte einen Zufallsgenerator $\mathcal{G}$ mit der Kennzeichnungsmenge $\tilde{\mathcal{K}} := \{1, \ldots, m\}$ und einer Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$\Pr[\mathcal{G}](\{j\}) = n_j/n$$

konstruieren. Aus den Regeln für ein Wahrscheinlichkeitsmaß folgt dann $n = n_1 + \ldots + n_m$, und man kann eine Urne verwenden, die insgesamt n Kugeln enthält, wobei n_1 Kugeln durch die Nummer 1, n_2 Kugeln durch die Nummer 2 usw. kenntlich gemacht werden.

4.4.2 Unabhängige Verbindungen

1. Betrachten wir jetzt zwei elementare Zufallsgeneratoren

$$\mathcal{G}_1 := (\mathcal{V}_1, (\mathcal{S}_1, \tilde{\mathcal{K}}_1)) \quad \text{und} \quad \mathcal{G}_2 := (\mathcal{V}_2, (\mathcal{S}_2, \tilde{\mathcal{K}}_2))$$

Außerdem nehmen wir an, daß beide Zufallsgeneratoren unabhängig voneinander verwendet werden können, womit folgendes gemeint sein soll: Man kann mit beiden Zufallsgeneratoren jeweils gesondert beliebig viele Situationen (Ereignisse, Sachverhalte) erzeugen; und es gilt wechselseitig: Wenn man einen der beiden Zufallsgeneratoren verwendet, verändert das in keiner Weise die Bedingungen für die Verwendung und die Funktionsweise des jeweils anderen Zufallsgenerators. Man kann dann einen kombinierten Zufallsgenerator

$$\mathcal{G} := (\mathcal{V}, (\mathcal{S}, \tilde{\mathcal{K}}_1 \times \tilde{\mathcal{K}}_2))$$

bilden, der folgendermaßen funktioniert: Es werden (entweder parallel oder seriell) die beiden Zufallsgeneratoren $\mathcal{G}_1$ und $\mathcal{G}_2$ aktiviert, und das Ergebnis wird als *eine* Situation aufgefaßt, die durch den Zufallsgenerator $\mathcal{G}$ entstanden ist. Für den neuen Zufallsgenerator gibt es dann offenbar eine zweidimensionale Kennzeichnungsmenge $\tilde{\mathcal{K}}_1 \times \tilde{\mathcal{K}}_2$; jede der durch ihn erzeugten Situationen wird durch einen zweidimensionalen Merkmalswert $(\tilde{k}_1, \tilde{k}_2) \in \tilde{\mathcal{K}}_1 \times \tilde{\mathcal{K}}_2$ charakterisiert. Man kann auch sagen, daß der neue Zufallsgenerator durch eine zweidimensionale Zufallsvariable $(\dot{X}_1, \dot{X}_2)$ mit dem Merkmalsraum $\tilde{\mathcal{K}}_1 \times \tilde{\mathcal{K}}_2$ repräsentiert werden kann.

2. Wegen der für $\mathcal{G}_1$ und $\mathcal{G}_2$ vorausgesetzten Unabhängigkeit kann man leicht ein Wahrscheinlichkeitsmaß für diese zweidimensionale Zufallsvariable finden. Denn infolge dieser Voraussetzung haben alle Ereignisse, die mit dem kombinierten Zufallsgenerator $\mathcal{G}$ erzeugt werden können, die gleiche aleatorische Wahrscheinlichkeit, nämlich $1/(m_1 m_2)$, wobei $m_1 = |\tilde{\mathcal{K}}_1|$ und $m_2 = |\tilde{\mathcal{K}}_2|$ ist. Also folgt zunächst für beliebige Werte $(\tilde{k}_1, \tilde{k}_2) \in \tilde{\mathcal{K}}_1 \times \tilde{\mathcal{K}}_2$ die Gleichung

$$\Pr[\dot{X}](\{(\tilde{k}_1, \tilde{k}_2)\}) = \Pr[\dot{X}_1](\{\tilde{k}_1\}) \Pr[\dot{X}_2](\{\tilde{k}_2\}) \tag{4.4.2}$$

Aus den Regeln für Wahrscheinlichkeitsmaße folgt hieraus auch für alle Teilmengen der Form $\tilde{K}_1 \times \tilde{K}_2 \subseteq \tilde{\mathcal{K}}_1 \times \tilde{\mathcal{K}}_2$ eine entsprechende Gleichung:

$$\Pr[\dot{X}](\tilde{K}_1 \times \tilde{K}_2) = \Pr[\dot{X}_1](\tilde{K}_1) \Pr[\dot{X}_2](\tilde{K}_2) \tag{4.4.3}$$

Wenn diese Gleichung für alle möglichen Merkmalsmengen $\tilde{K}_1 \times \tilde{K}_2$ erfüllt ist, sagt man, daß $\dot{X}_1$ und $\dot{X}_2$ *stochastisch unabhängig* sind.

3. Das Konstruktionsverfahren kann in zweierlei Hinsicht verallgemeinert werden. Eine erste Verallgemeinerung ergibt sich daraus, daß es sich bei $\mathcal{G}_1$ und $\mathcal{G}_2$ um beliebige, nicht unbedingt elementare Zufallsgeneratoren handeln kann; also z. B. um Zufallsgeneratoren, die mit den in Abschnitt 4.4.1 besprochenen Methoden konstruiert worden sind. Wiederum kann dann ein kombinierter Zufallsgenerator gebildet werden, der durch eine zweidimensionale Zufallsvariable $(\dot{X}_1, \dot{X}_2)$ repräsentiert wird. Kann vorausgesetzt werden, daß sich die beiden Zufallsgeneratoren in ihrer Funktionsweise wechselseitig nicht beeinflussen, sind auch die Komponenten dieser zweidimensionalen Zufallsvariablen im Sinne von Definition (4.4.3) stochastisch unabhängig. Die stochastische Unabhängigkeit von zwei Zufallsvariablen hängt also nicht von der Art ihrer Verteilung ab, sondern nur davon, ob man begründen kann, daß die Zufallsgeneratoren, auf die sich ihre Definition bezieht, unabhängig voneinander funktionieren.

4. Eine zweite Verallgemeinerung ergibt sich, wenn man von einer beliebigen endlichen Anzahl von Zufallsgeneratoren ausgeht:

$$\mathcal{G}_j := (\mathcal{V}_j, (\mathcal{S}_j, \tilde{\mathcal{X}}_j)) \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

Sie können zu einem kombinierten Zufallsgenerator

$$\mathcal{G} := (\mathcal{V}, (\mathcal{S}, \tilde{\mathcal{X}}_1 \times \cdots \times \tilde{\mathcal{X}}_m))$$

verbunden werden, der durch eine Zufallsvariable $(\dot{X}_1, \ldots, \dot{X}_m)$ repräsentiert werden kann. Kann vorausgesetzt werden, daß die Zufallsgeneratoren sich in ihrer Funktionsweise gegenseitig nicht beeinflussen, sind auch die Komponenten von $\dot{X}$ stochastisch unabhängig, d. h. es gilt:

$$\Pr[\dot{X}_1, \ldots, \dot{X}_m](\tilde{X}_1 \times \cdots \times \tilde{X}_m) = \prod_{j=1}^{m} \Pr[\dot{X}_j](\tilde{X}_j) \tag{4.4.4}$$

für beliebige $\tilde{X}_1 \times \cdots \times \tilde{X}_m \subseteq \tilde{\mathcal{X}}_1 \times \cdots \times \tilde{\mathcal{X}}_m$. Der Beweis kann durch vollständige Induktion geführt werden.

4.4.3 Mischungen

1. Schließlich können Zufallsgeneratoren auch durch Mischungen miteinander verbunden werden. Hierfür werden $m+1$ Zufallsgeneratoren

$$\mathcal{G}_j := (\mathcal{V}_j, (\mathcal{S}_j, \tilde{\mathcal{X}}_j)) \qquad (j = 0, 1, \ldots, m)$$

vorausgesetzt. Es wird angenommen, daß die Kennzeichnungsmenge von $\mathcal{G}_0$ bzw. einer Zufallsvariablen $\dot{X}_0$ durch $\tilde{\mathcal{X}}_0 := \{1, \ldots, m\}$ charakterisiert werden kann. Dann kann ein neuer Zufallsgenerator $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, (\mathcal{S}, \tilde{\mathcal{Y}}))$ konstruiert werden, der folgendermaßen funktioniert: Zuerst wird $\mathcal{G}_0$ aktiviert, dann wird abhängig von dem realisierten Wert $\dot{X}_0 = j$ der Zufallsgenerator $\mathcal{G}_j$ verwendet, um einen Wert für die Zufallsvariable $\dot{Y}$ zu erzeugen, die den Zufallsgenerator $\mathcal{G}$ repräsentiert. Die Aufgabe besteht darin, die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen $\dot{Y}$ zu ermitteln. Ihr Wertebereich ist durch $\tilde{\mathcal{Y}} = \tilde{\mathcal{X}}_1 \cup \ldots \cup \tilde{\mathcal{X}}_m$ gegeben. Um die weiteren Überlegungen zu vereinfachen, wird angenommen, daß die Merkmalsräume $\tilde{\mathcal{X}}_1, \ldots, \tilde{\mathcal{X}}_m$ identisch sind und jeweils q Merkmalswerte umfassen.[20]

2. Um die Überlegung durchzuführen, ist es am einfachsten, sich die Zufallsgeneratoren als Urnen vorzustellen. Es wird also angenommen, daß $\mathcal{G}_0$ durch eine Urne gegeben ist, die $n_0 = n_{01} + \ldots + n_{0m}$ Kugeln enthält, davon n_{0k} mit der Nummer k. Dem entspricht das aleatorische Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\Pr[\dot{X}_0](\{k\}) = \frac{n_{0k}}{n_0}$$

Ganz analog wird für die Zufallsgeneratoren $\mathcal{G}_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ angenommen, daß sie durch Urnen gegeben sind, die $n_j = n_{j1} + \ldots + n_{jq}$ Kugeln enthalten, davon n_{jk} mit der Nummer k. Dem entsprechen die aleatorischen Wahrscheinlichkeitsmaße

$$\Pr[\dot{X}_j](\{k\}) = \frac{n_{jk}}{n_j} = \Pr[\dot{Y} \mid \dot{X}_0 = j](\{k\})$$

Wegen der zweiten Regel für das Rechnen mit bedingten Wahrscheinlichkeiten ergibt sich

$$\Pr[\dot{Y}](\{k\}) = \sum_{j=1}^{m} \Pr[\dot{X}_0](\{j\}) \Pr[\dot{Y} \mid \dot{X}_0 = j](\{k\}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{n_{0j} n_{jk}}{n_0 \, n_j}$$

Die Darstellung zeigt, wie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $\dot{Y}$ als eine durch $\dot{X}_0$ vorgenommene Mischung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Zufallsvariablen $\dot{X}_1, \ldots, \dot{X}_m$ gebildet wird.

[20] Das ist keine Einschränkung, denn der Merkmalsraum einer Zufallsvariablen kann beliebig erweitert werden, indem man für die zusätzlich aufgenommenen Werte die Wahrscheinlichkeit Null annimmt.

4.5 Erwartungswerte und Wiederholungen

In Abschnitt 3.3 wurden epistemische Wahrscheinlichkeitsaussagen von modalen Aussagen unterschieden, die sich auf Möglichkeiten im Sinne von Dispositionen beziehen. Der aleatorische Wahrscheinlichkeitsbegriff ist dagegen ausdrücklich ein modaler Begriff, zu dessen Explikation auf ein Verständnis von Möglichkeiten, insbesondere „gleicher Möglichkeiten“, als Dispositionen eines Zufallsgenerators zurückgegriffen wird. Daraus resultiert ein zentrales Problem der Wahrscheinlichkeitstheorie: Modalitäten sind nicht unmittelbar beobachtbar; wie also können modale Wahrscheinlichkeitsaussagen mit beobachtbaren Sachverhalten in einen Zusammenhang gebracht werden? In der Geschichte der (aleatorischen) Wahrscheinlichkeitstheorie sind vor allem zwei Überlegungen diskutiert worden, um zu einer Antwort zu gelangen.

a) Man kann einerseits an der Vorstellung festhalten, daß sich aleatorische Wahrscheinlichkeitsaussagen auf Möglichkeiten beziehen, so daß Aussagen dieser Art keine logisch ableitbaren Implikationen für Hypothesen haben, die sich auf Realisationen solcher Möglichkeiten richten. Infolgedessen erlauben aleatorische Wahrscheinlichkeitsaussagen nur *Hypothesen* über Situationen, die durch Zufallsgeneratoren erzeugt werden; oder anders formuliert: Um einen Zusammenhang zwischen aleatorischen Wahrscheinlichkeiten und Realisationen möglicher Ereignisse herzustellen, sind *epistemische* Wahrscheinlichkeitsaussagen erforderlich.

b) Ein alternativer Gedankengang nimmt die „logische Kluft“ zwischen klassisch konzipierten aleatorischen Wahrscheinlichkeiten und empirisch ermittelbaren Sachverhalten zum Anlaß, modal konzipierte Wahrscheinlichkeitsbegriffe grundsätzlich zu verwerfen und stattdessen zu versuchen, Wahrscheinlichkeiten durch relative Häufigkeiten zu definieren. Die Idee ist, einen Wahrscheinlichkeitsbegriff so zu konzipieren, daß Wahrscheinlichkeitsaussagen als Aussagen über relative Häufigkeiten verstanden werden können.

Mit dem zweiten Gedankengang, der sog. frequentistischen Wahrscheinlichkeitskonzeptionen zugrunde liegt, beschäftigen wir uns ausführlich in Abschnitt 8.2. Dort zeigen wir auch, daß dieser Gedankengang in eine theoretische Sackgasse führt. Deshalb folgen wir hier der unter (a) angedeuteten Überlegung. Dies erfordert eine Reihe von Vorüberlegungen, die sich sowohl auf Begriffsbildungen als auch auf die Idee der Wiederholbarkeit beziehen. Das wesentliche Argument wird erst im letzten Abschnitt im Anschluß an Bernoullis „Gesetz der großen Zahlen“ ausgeführt.

4.5.1 Erwartungswerte und Varianzen

1. Eine Art Schlüsselrolle für die Frage nach dem Verhältnis zwischen aleatorischen Wahrscheinlichkeiten und empirisch ermittelbaren Häufigkeiten kommt dem Begriff eines „Erwartungswertes“ zu. Eine Schlüsselrolle deshalb, weil dieser Begriff eine fundamentale Ambivalenz aufweist. Einerseits handelt es sich um einen Begriff der aleatorischen Wahrscheinlichkeitsrechnung und infolgedessen um einen modalen Begriff, der sich auf *mögliche* Realisationen von Zufallsgeneratoren bezieht. Andererseits suggeriert das Wort ein epistemisches Verständnis: etwas, das man „erwarten“ sollte. Dementsprechend wird dies Wort oft so verwendet, als ob mit seiner Hilfe ein Übergang von aleatorischen Möglichkeiten zu epistemischen Erwartungen hergestellt werden könne. Dadurch wird allerdings das Problem, auf das in den einleitenden Bemerkungen zu diesem Kapitel hingewiesen worden ist, eher verschleiert als aufgeklärt. Bei den folgenden Begriffserläuterungen sollte deshalb darauf geachtet werden, daß es sich zunächst ausschließlich um Begriffsbildungen der aleatorischen Wahrscheinlichkeitsrechnung handelt.

2. Wenn X eine statistische Variable ist, wenn man sich also auf eine Abbildung $X : \Omega \longrightarrow \tilde{\mathcal{X}}$ beziehen kann, kann man ihren arithmetischen Mittelwert folgendermaßen definieren:

$$\mathrm{M}(X) := \sum_{\tilde{x} \in \tilde{\mathcal{X}}} \tilde{x}\, \mathrm{P}[X](\{\tilde{x}\}) \tag{4.5.1}$$

Hier bezeichnet $\mathrm{P}[X]$ die Häufigkeitsverteilung der statistischen Variablen X in der Menge Ω (vgl. Abschnitt 2.7). Ganz analog kann man für eine Zufallsvariable $\dot{X} : \tilde{\mathcal{K}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{X}}$, die für einen Zufallsgenerator $\mathcal{G}$ definiert ist, den Ausdruck

$$\mathrm{M}(\dot{X}) := \sum_{\tilde{x} \in \tilde{\mathcal{X}}} \tilde{x}\, \mathrm{Pr}[\dot{X}](\{\tilde{x}\}) \tag{4.5.2}$$

definieren. Er wird *Erwartungswert* der Zufallsvariablen $\dot{X}$ genannt.

3. Hinter der formalen Analogie verbirgt sich ein wichtiger Bedeutungsunterschied. Mit dem Mittelwert einer statistischen Variablen kann man empirische Aussagen über eine Menge von Merkmalswerten (die als Eigenschaften von Situationen in Ω eine empirische Bedeutung haben) formulieren. Aber welcher Art sind demgegenüber Aussagen über Erwartungswerte von Zufallsvariablen? Sie beziehen sich nicht auf eine Menge real existierender Situationen, sondern auf Situationen, die mit einem Zufallsgenerator erzeugt werden *könnten*. Hier muß man auf die Formulierung achten. Denn sicherlich kann man einen Zufallsgenerator verwenden, um eine bestimmte Menge von Situationen (Ereignissen, Sachverhalten) zu erzeugen, etwa die Menge $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$. Dann kann man für jede dieser Situationen feststellen, welcher Wert der Zufallsvariablen $\dot{X}$ in ihr realisiert worden ist, und schließlich kann man auch den Mittelwert *dieser* Werte

berechnen. Das Resultat ist dann jedoch ein *statistischer* Mittelwert entsprechend der Definition (4.5.1). Der Erwartungswert der Zufallsvariablen $\dot{X}$ muß von diesem statistischen Mittelwert unterschieden werden; schon deshalb, weil sich der statistische Mittelwert mit jeder neuen Situation, die man der Menge Ω hinzufügt, verändert.

4. Warum spricht man überhaupt von einem *Erwartungswert*? Die Bezeichnung stammt aus der Frühphase der Wahrscheinlichkeitsrechnung, in der man sich in erster Linie mit Glücksspielen beschäftigt hat und Zufallsvariablen verwendet wurden, um den möglichen Ergebnissen eines Glücksspiels Geldbeträge zuzuordnen, die ein Spieler, wenn das Ergebnis eintritt, gewinnt.[21] Man denke z. B. an ein Spiel mit einem Würfel, bei dem man mit einer geraden Augenzahl 1 Euro und mit einer ungeraden Augenzahl 3 Euro gewinnt. Dieses Spiel kann durch eine Zufallsvariable

$$\dot{X} : \{1,2,3,4,5,6\} \longrightarrow \{1,3\}$$

repräsentiert werden, wobei

$$\dot{X}(1) = \dot{X}(3) = \dot{X}(5) = 3 \quad \text{und} \quad \dot{X}(2) = \dot{X}(4) = \dot{X}(6) = 1$$

ist. Der Erwartungswert von $\dot{X}$ beträgt dann $\mathrm{M}(\dot{X}) = 2$ (Euro). Aber heißt das, daß man erwarten kann, bei diesem Spiel 2 Euro zu gewinnen? Das kann man so offenbar nicht sagen. Denn es gibt zwei Möglichkeiten: Man kann 1 Euro oder 3 Euro gewinnen; beide Möglichkeiten haben die gleiche

[21] Hinweise zur Begriffsgeschichte finden sich bei van der Wærden (1975). In der älteren Literatur zur Wahrscheinlichkeitsrechnung wurde auch oft von einer „mathematischen Hoffnung“ gesprochen; z. B. findet sich bei Meyer (1879, S. 131) folgende Definition: „Die mathematische Hoffnung ist das Product aus dem erwarteten Gewinn mit der Wahrscheinlichkeit ihn zu erlangen. Man nennt sie auch die Erwartung oder den Vortheil des Spielers.“ In gewisser Weise gewinnen Erläuterungen dieser Art ihre Bedeutung dadurch, daß an ein Verständnis epistemischer Kategorien angeknüpft wird. Wie die folgende Passage aus einem älteren „Handbuch der Lebensversicherung“ zeigt, gibt es gleichermaßen einen Bezug zur Frage, wie ein Wertbegriff definiert werden kann: „Es ist einleuchtend, dass eine Summe Geldes, welche Jemand *gewiss* zu erhalten hat, einen ganz anderen Werth repräsentirt, als dieselbe Summe Geldes, welche er nur in dem Falle erhält, wenn ein *ungewisses* Ereigniss eintritt. Diese letztere Summe hat allemal einen kleineren Werth, als die erstere, und zwar ist diese um so kleiner, je geringer die Wahrscheinlichkeit ist, dass das Ereigniss eintreten wird, und umgekehrt. Nehmen wir an, dass in einer Urne 19 schwarze und 1 weisse Kugel sind, und es soll derjenige, welcher in einer Ziehung die weisse Kugel zieht, 40 Thaler erhalten. In dem vorliegenden Fall haben wir nur 1 günstigen Fall, 19 ungünstige und mithin 20 überhaupt mögliche Fälle. Wenn alle Kugeln gezogen würden, so würde die weisse gleichfalls gezogen werden und der Gewinn = 40 Thlr. würde absolut sicher sein. Da sämmtliche Fälle also einen Werth von 40 Thlr. repräsentiren, so ist es klar, dass 1 Fall nur 1/20 von jenem Werth hat; folglich hat der 1 günstige Fall (die weisse Kugel) nur einen Erwartungswerth = 1/20 von 40 Thaler, also 2 Thlr. [. . .] Der wirkliche Werth solcher ungewissen oder durch das etwaige Eintreffen eines oder mehrerer Ereignisse bedingten Geldsummen wird also gefunden, wenn man die Wahrscheinlichkeit, eine solche zu erhalten, mit dem absoluten Wert multiplicirt. Das Produkt heisst die *mathematische Hoffnung* (Erwartung) oder der *Geldwerth der mathematischen Wahrscheinlichkeit*.“ (Karup 1885, S. 184f.)

aleatorische Wahrscheinlichkeit 0.5, aber sicherlich wird man nicht 2 Euro gewinnen.

5. Der Begriff ‘Erwartungswert’, so wie er durch (4.5.2) definiert wird, hat tatsächlich mit „Erwartungen“ zunächst überhaupt nichts zu tun, sondern dient zur Formulierung aleatorischer Wahrscheinlichkeitsaussagen. Man kann sich das anhand einer Zufallsvariablen $\dot{X}$ verdeutlichen, die nur die Werte 0 und 1 annehmen kann. Dann ist $\mathrm{M}(\dot{X}) = \Pr[\dot{X}](\{1\})$, d. h. der Erwartungswert ist mit einer aleatorischen Wahrscheinlichkeit identisch.

6. Ein weiterführender Gedanke bezieht sich darauf, daß man Zufallsgeneratoren beliebig oft aktivieren bzw. verwenden kann. Z. B. kann man an ein Glücksspiel denken, das man sehr oft wiederholen kann. Dies legt die Überlegung nahe, den Erwartungswert als denjenigen Betrag aufzufassen, von dem man erwarten kann, daß man ihn bei einer häufigen Wiederholung des Spiels im Durchschnitt gewinnen (oder verlieren) wird. Dementsprechend wird oft gesagt, daß der Erwartungswert einer Zufallsvariablen der zu erwartende Durchschnittswert einer größeren Anzahl von Realisationen der Zufallsvariablen ist. Diese Formulierung macht allerdings erneut deutlich, wie sich im Begriff eines Erwartungswerts aleatorische und epistemische Überlegungen vermischen. Wir werden uns später überlegen, wie ein Zusammenhang explizit hergestellt werden kann.

7. Auch der Begriff der Varianz einer Zufallsvariablen kann in Analogie zum Begriff der Varianz einer statistischen Variablen definiert werden. Ist X eine statistische Variable, kann man die Definition

$$\mathrm{V}(X) := \textstyle\sum_{\tilde{x}\in\tilde{\mathcal{X}}} (\tilde{x} - \mathrm{M}(X))^2\, \mathrm{P}[X](\{\tilde{x}\})$$

verwenden. Ganz analog wird durch

$$\mathrm{V}(\dot{X}) := \textstyle\sum_{\tilde{x}\in\tilde{\mathcal{X}}} (\tilde{x} - \mathrm{M}(\dot{X}))^2\, \Pr[\dot{X}](\{\tilde{x}\}) \qquad (4.5.3)$$

die *Varianz einer Zufallsvariablen* $\dot{X}$ definiert. Der Unterschied kommt wiederum dadurch zustande, daß zur Gewichtung im ersten Fall eine Häufigkeitsfunktion, im zweiten Fall ein aleatorisches Wahrscheinlichkeitsmaß verwendet wird.

8. Auch für die inhaltliche Interpretation stellen sich die gleichen Probleme, wie sie zuvor für den Begriff des Erwartungswertes bemerkt worden sind. Am einfachsten sieht man das, wenn man die Varianz einer Zufallsvariablen auf folgende Weise ausdrückt:

$$\mathrm{V}(\dot{X}) = \mathrm{M}((\dot{X} - \mathrm{M}(\dot{X}))^2)$$

Diese Schreibweise zeigt, daß sich die Varianz auf den Erwartungswert für die quadrierten Abweichungen der Werte einer Zufallsvariablen von ihrem Erwartungswert bezieht.[22] Schließlich sei noch angemerkt, daß sich aus der Definition (4.5.3) unmittelbar die Gleichung

$$\mathrm{V}(\dot{X}) = \mathrm{M}(\dot{X}^2) - \mathrm{M}(\dot{X})^2 \qquad (4.5.4)$$

ableiten läßt, die zur Berechnung von Varianzen oft hilfreich ist.

9. In Abschnitt 4.3.2 wurde besprochen, wie man durch Funktionen einer oder mehrerer gegebener Zufallsvariablen neue Zufallsvariablen konstruieren kann. Im allgemeinen ist eine m-dimensionale Zufallsvariable $\dot{X} = (\dot{X}_1, \ldots, \dot{X}_m)$ gegeben, die für die Elemente einer Kennzeichnungsmenge $\tilde{\mathcal{K}}$ definiert ist, und außerdem eine Funktion

$$g : \tilde{\mathcal{X}}_1 \times \cdots \times \tilde{\mathcal{X}}_m \longrightarrow \tilde{\mathcal{Y}}$$

die einen neuen Wertebereich $\tilde{\mathcal{Y}}$ für eine neue Zufallsvariable $\dot{Y}$ erzeugt, deren Werte durch $\dot{Y}(\tilde{k}) := g(\dot{X}_1(\tilde{k}), \ldots, \dot{X}_m(\tilde{k}))$ definiert sind. Erwartungswert und Varianz von $\dot{Y}$ sind dann durch

$$\mathrm{M}(\dot{Y}) = \textstyle\sum_{\tilde{y}\in\tilde{\mathcal{Y}}} \tilde{y}\, \Pr[\dot{Y}](\{\tilde{y}\})$$

$$\mathrm{V}(\dot{Y}) = \textstyle\sum_{\tilde{y}\in\tilde{\mathcal{Y}}} (\tilde{y} - \mathrm{M}(\dot{Y}))^2\, \Pr[\dot{Y}](\{\tilde{y}\})$$

berechenbar.

10. Ein wichtiger Spezialfall tritt auf, wenn die neue Zufallsvariable als eine Linearkombination der Zufallsvariablen $\dot{X}_1, \ldots, \dot{X}_m$ gebildet wird, wenn also $\dot{Y}$ durch $\dot{Y}(\tilde{k}) := a_1\dot{X}_1(\tilde{k}) + \ldots + a_m\dot{X}_m(\tilde{k})$ definiert wird, wobei $a_1, \ldots, a_m$ beliebig vorgegebene Zahlen sind. In diesem Fall folgt nämlich die Gleichung

$$\mathrm{M}(\dot{Y}) = a_1\mathrm{M}(\dot{X}_1) + \ldots + a_m\mathrm{M}(\dot{X}_m) \qquad (4.5.5)$$

so daß sich der Erwartungswert von $\dot{Y}$ unmittelbar aus den Erwartungswerten der Zufallsvariablen $\dot{X}_1, \ldots, \dot{X}_m$ berechnen läßt.

11. Für die Varianz von $\dot{Y}$ gilt eine entsprechende Formel *nicht* ohne weiteres. Um dies genauer zu untersuchen, beziehen wir uns zunächst auf den Fall, daß $\dot{Y} = \dot{X}_1 + \dot{X}_2$, also eine Summe von nur zwei Zufallsvariablen ist. Unter Verwendung von (4.5.4) ist dann

$$\mathrm{V}(\dot{Y}) = \mathrm{M}(\dot{Y}^2) - \mathrm{M}(\dot{Y})^2 \qquad (4.5.6)$$

Für die beiden Summanden auf der rechten Seite findet man durch Ausrechnen und Anwendung von (4.5.5):

$$\mathrm{M}(\dot{Y}^2) = \mathrm{M}(\dot{X}_1^2) + \mathrm{M}(\dot{X}_2^2) + 2\,\mathrm{M}(\dot{X}_1\dot{X}_2)$$

$$\mathrm{M}(\dot{Y})^2 = \mathrm{M}(\dot{X}_1)^2 + \mathrm{M}(\dot{X}_2)^2 + 2\,\mathrm{M}(\dot{X}_1)\,\mathrm{M}(\dot{X}_2)$$

[22] Um dies ganz explizit zu machen, kann man zunächst eine neue Zufallsvariable $\dot{Z} := (\dot{X} - \mathrm{M}(\dot{X}))^2$ definieren. Dann ist die Varianz von $\dot{X}$ mit dem Erwartungswert einer Zufallsvariablen, nämlich $\dot{Z}$, identisch.

Durch Einsetzen in (4.5.6) folgt dann

$$V(\dot{Y}) \;=\; V(\dot{X}_1) + V(\dot{X}_2) + 2\,(M(\dot{X}_1\dot{X}_2) - M(\dot{X}_1)\,M(\dot{X}_2)) \qquad (4.5.7)$$

Um die Überlegung fortzusetzen, wird ein neuer Begriff eingeführt: die *Kovarianz* von zwei Zufallsvariablen $\dot{X}_1$ und $\dot{X}_2$, die durch

$$\mathrm{Cov}(\dot{X}_1, \dot{X}_2) := M((\dot{X}_1 - M(\dot{X}_1))(\dot{X}_2 - M(\dot{X}_2)))$$

definiert wird. Durch Ausrechnen findet man

$$\mathrm{Cov}(\dot{X}_1, \dot{X}_2) = M(\dot{X}_1\dot{X}_2) - M(\dot{X}_1)\,M(\dot{X}_2)$$

Setzt man diesen Ausdruck für die Kovarianz in (4.5.7) ein, findet man

$$V(\dot{Y}) = V(\dot{X}_1) + V(\dot{X}_2) + 2\,\mathrm{Cov}(\dot{X}_1, \dot{X}_2) \qquad (4.5.8)$$

In dieser Weise kann man also die Varianz von $\dot{Y}$ durch die Varianzen und die Kovarianz der Zufallsvariablen $\dot{X}_1$ und $\dot{X}_2$ berechnen.

12. Ist die Kovarianz zwischen $\dot{X}_1$ und $\dot{X}_2$ Null, vereinfacht sich die Formel zu: $V(\dot{Y}) = V(\dot{X}_1) + V(\dot{X}_2)$. Sind $\dot{X}_1$ und $\dot{X}_2$ stochastisch unabhängig (vgl. Abschnitt 4.4.2), findet man

$$\begin{aligned} M(\dot{X}_1\dot{X}_2) \;&=\; \textstyle\sum_{\tilde{x}_1\in\tilde{\mathcal{X}}_1}\sum_{\tilde{x}_2\in\tilde{\mathcal{X}}_2} \tilde{x}_1\tilde{x}_2\,\Pr[\dot{X}_1, \dot{X}_2](\{(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)\}) \\ &=\; \textstyle\sum_{\tilde{x}_1\in\tilde{\mathcal{X}}_1}\sum_{\tilde{x}_2\in\tilde{\mathcal{X}}_2} \tilde{x}_1\tilde{x}_2\,\Pr[\dot{X}_1](\{\tilde{x}_1\})\,\Pr[\dot{X}_2](\{\tilde{x}_2\}) \\ &=\; \Big(\textstyle\sum_{\tilde{x}_1\in\tilde{\mathcal{X}}_1} \tilde{x}_1\,\Pr[\dot{X}_1](\{\tilde{x}_1\})\Big)\Big(\textstyle\sum_{\tilde{x}_2\in\tilde{\mathcal{X}}_2} \tilde{x}_2\,\Pr[\dot{X}_2](\{\tilde{x}_2\})\Big) \end{aligned}$$

also $M(\dot{X}_1\dot{X}_2) = M(\dot{X}_1)\,M(\dot{X}_2)$. Daraus folgt: Wenn $\dot{X}_1$ und $\dot{X}_2$ stochastisch unabhängig sind, ist ihre Kovarianz Null;[23] und man erhält dann aus (4.5.8) die Formel $V(\dot{Y}) = V(\dot{X}_1) + V(\dot{X}_2)$. Dieses Ergebnis kann auch für mehr als zwei Zufallsvariablen verallgemeinert werden.

4.5.2 Unabhängige Wiederholungen

1. Wie in Abschnitt 4.5.1 angedeutet worden ist, suggeriert der Begriff eines Erwartungswertes, daß es einen Zusammenhang gibt zwischen aleatorischen Wahrscheinlichkeiten und Erwartungen, die sich auf relative Häufigkeiten in Mengen von Realisationen einer Zufallsvariablen beziehen. Es wurde allerdings auch schon darauf hingewiesen, daß ein unmittelbarer begrifflicher Zusammenhang nicht hergestellt werden kann, da sich aleatorische Wahrscheinlichkeiten auf *mögliche*, dagegen relative Häufigkeiten auf

[23] Umgekehrt folgt jedoch aus $\mathrm{Cov}(\dot{X}_1, \dot{X}_2) = 0$ nicht unbedingt, daß die beiden Zufallsvariablen stochastisch unabhängig sind. Man muß also zwischen unkorrelierten und unabhängigen Zufallsvariablen unterscheiden.

tatsächlich realisierte Ereignisse beziehen. In den folgenden Abschnitten soll besprochen werden, wie gleichwohl ein indirekter Zusammenhang hergestellt werden kann. Zur Vorbereitung der Überlegungen werden zunächst repetitive Zufallsgeneratoren besprochen. Dann wird für ihre Charakterisierung die Binomialverteilung eingeführt.

2. Ausgangspunkt ist ein beliebiger Zufallsgenerator $\mathcal{G} \;:=\; (\mathcal{V}, (\mathcal{S}, \tilde{\mathcal{X}}))$. Aus der Definition von Zufallsgeneratoren folgt, daß es beliebig viele unabhängige Realisierungen gibt. Damit ist gemeint: Wie mit dem Zufallsgenerator eine neue Situation (Ereignis, Sachverhalt) erzeugt wird, hängt nicht davon ab, welche Situationen schon zuvor mit ihm erzeugt worden sind. Also kann man einen neuen Zufallsgenerator

$$\mathcal{G}_n \;:=\; (\mathcal{V}_n, (\mathcal{S}_n, \tilde{\mathcal{X}}^n))$$

konstruieren, der darin besteht, den Zufallsgenerator $\mathcal{G}$ n-mal zu verwenden. Jede Betätigung von $\mathcal{G}_n$ liefert eine n-fache Situation, die aus n Teilsituationen besteht und sich durch einen Wert $(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) \in \tilde{\mathcal{X}}^n$ charakterisieren läßt. Ein Wahrscheinlichkeitsmaß für $\mathcal{G}_n$ erhält man durch

$$\Pr[\mathcal{G}_n](\{(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)\}) \;=\; \prod_{j=1}^{n} \Pr[\mathcal{G}](\{\tilde{x}_j\})$$

da für die Konstruktion angenommen wird, daß es sich um unabhängige Wiederholungen des Zufallsgenerators $\mathcal{G}$ handelt.

3. Für die weiteren Überlegungen wird angenommen, daß der Zufallsgenerator $\mathcal{G}$ durch eine Zufallsvariable $\dot{X}$ mit dem Wertebereich $\tilde{\mathcal{X}}$ repräsentiert wird. Da der Zufallsgenerator $\mathcal{G}_n$ dadurch gebildet wird, daß $\mathcal{G}$ n-mal betätigt wird, kann man auch für jede einzelne Betätigung von $\mathcal{G}$ eine eigene Zufallsvariable definieren. (Man kann sich vorstellen, daß n Kopien von $\mathcal{G}$ verwendet werden.) So erhält man die Zufallsvariablen $\dot{X}_1, \ldots, \dot{X}_n$. Jede dieser Zufallsvariablen hat die gleiche Wahrscheinlichkeitsverteilung wie $\dot{X}$, und aus ihrer Konstruktion folgt, daß sie stochastisch unabhängig sind. Also kann der Zufallsgenerator $\mathcal{G}_n$ durch eine n-dimensionale Zufallsvariable $(\dot{X}_1, \ldots, \dot{X}_n)$ mit dem Wertebereich $\tilde{\mathcal{X}}^n$ repräsentiert werden, deren Komponenten stochastisch unabhängig sind und identische (durch $\mathcal{G}$ bestimmte) Wahrscheinlichkeitsverteilungen haben.

4. Sei nun $\tilde{x}$ ein beliebiger Wert in $\tilde{\mathcal{X}}$. Man kann dann eine neue Zufallsvariable $\dot{Z}_n[\tilde{x}]$ definieren, mit der erfaßt wird, wie oft der Wert $\tilde{x}$ bei einer Betätigung des Zufallsgenerators $\mathcal{G}_n$ auftritt. Zur Definition dieser Zufallsvariablen ist es zweckmäßig, Indikatorfunktionen zu verwenden:

$$\dot{I}[\dot{X}_j = \tilde{x}] := \begin{cases} 1 & \text{wenn } \dot{X}_j \text{ den Wert } \tilde{x} \text{ annimmt} \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases}$$

$\dot{Z}_n[\tilde{x}]$ kann dann folgendermaßen definiert werden:

$$\dot{Z}_n[\tilde{x}] \;:=\; \sum_{j=1}^{n} \dot{I}[X_j = \tilde{x}]$$

Ihr Wertebereich ist durch $\tilde{\mathcal{Z}}_n = \{0, 1, \ldots, n\}$ gegeben. Die weitere Frage ist, wie man für $\dot{Z}_n[\tilde{x}]$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung finden kann.

5. Zu bestimmen ist für jeden Wert $k \in \tilde{\mathcal{Z}}_n$ die aleatorische Wahrscheinlichkeit

$$\Pr[\dot{Z}_n[\tilde{x}]](\{k\})$$

Offenbar muß man sich auf den Zufallsgenerator $\mathcal{G}_n$ beziehen. Betrachten wir zunächst eine der möglichen Ergebnisfolgen: $(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$. Die Wahrscheinlichkeit, daß der Wert $\tilde{x}$ in dieser Folge genau k-mal vorkommt, ist

$$p_{\tilde{x}}^{k}\,(1 - p_{\tilde{x}})^{n-k} \tag{4.5.9}$$

Dabei ist $p_{\tilde{x}} := \Pr[\dot{X}](\{\tilde{x}\})$ die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Wertes $\tilde{x}$ bei einer einmaligen Betätigung des Zufallsgenerators $\mathcal{G}$.

6. Jetzt muß ermittelt werden, wieviele Folgen es gibt, bei denen $\tilde{x}$ genau k-mal vorkommt. Für die dafür erforderliche kombinatorische Überlegung sei zunächst an zwei Definitionen erinnert. Zunächst an die Definition von $n! := 1 \cdot 2 \cdots n$ (gesprochen: n Fakultät), wobei n eine beliebige natürliche Zahl ist und außerdem vereinbart wird, daß $0! = 1$ sein soll. Weiterhin an die Definition des Binomialkoeffizienten (gesprochen: n über k):

$$\binom{n}{k} \;:=\; \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \qquad \text{für } \; 0 \le k \le n$$

Weiterhin sei daran erinnert, daß die Anzahl von Folgen der Länge n, bei denen $\tilde{x}$ genau k-mal vorkommt, gerade n über k ist. Also folgt unter Verwendung von (4.5.9) für die gesuchte Wahrscheinlichkeitsverteilung:

$$\Pr[\dot{Z}_n[\tilde{x}]](\{k\}) \;=\; \binom{n}{k}\, p_{\tilde{x}}^{k}\,(1 - p_{\tilde{x}})^{n-k}$$

Sie wird *Binomialverteilung* (mit dem Parameter $p_{\tilde{x}}$) genannt.

7. Um den Erwartungswert der Zufallsvariablen $\dot{Z}_n[\tilde{x}]$ zu bestimmen, erinnern wir uns an ihre Definition als eine Summe von Indikatorvariablen $\dot{I}[\dot{X}_j = \tilde{x}]$. Jede dieser Indikatorvariablen ist selbst eine Zufallsvariable, die genau zwei Werte annehmen kann: 1 mit der Wahrscheinlichkeit $p_{\tilde{x}}$ und 0 mit der Wahrscheinlichkeit $1 - p_{\tilde{x}}$. Der Erwartungswert ist also

$$\mathrm{M}(\dot{I}[\dot{X}_j \;=\; \tilde{x}]) = p_{\tilde{x}}$$

und somit folgt aus (4.5.5) für den Erwartungswert von $\dot{Z}_n[\tilde{x}]$:

$$\mathrm{M}(\dot{Z}_n[\tilde{x}]) \;=\; n\,p_{\tilde{x}}$$

Ganz analog findet man, daß $\mathrm{V}(\dot{I}[\dot{X}_j = \tilde{x}]) = p_{\tilde{x}}\,(1 - p_{\tilde{x}})$ ist, und da die Indikatorvariablen stochastisch unabhängig sind, erhält man

$$\mathrm{V}(\dot{Z}_n[\tilde{x}]) \;=\; \mathrm{V}\Big(\sum_{j=1}^{n} \dot{I}[\dot{X}_j = \tilde{x}]\Big) \;=\; n\,p_{\tilde{x}}\,(1 - p_{\tilde{x}}) \tag{4.5.10}$$

für die Varianz der Zufallsvariablen $\dot{Z}_n[\tilde{x}]$.

4.5.3 Bernoullis Gesetz der großen Zahlen

1. Wie kann die Vermutung eines Zusammenhangs zwischen aleatorischen Wahrscheinlichkeiten und relativen Häufigkeiten formuliert werden? Unter Verwendung der im vorangegangenen Abschnitt eingeführten Notationen, könnte man versuchen, sie so zu formulieren:

$$\dot{Z}_n[\tilde{x}]/n \;\approx\; p_{\tilde{x}}$$

In dieser Formulierung ist ein Vergleich allerdings nicht möglich. Denn auf der rechten Seite steht eine bestimmte Wahrscheinlichkeit

$$p_{\tilde{x}} \;=\; \Pr[\dot{X}](\{\tilde{x}\})$$

die für einen Zufallsgenerator $\mathcal{G}$ definiert ist. Auf der linken Seite steht dagegen keine bestimmte Zahl, sondern eine Zufallsvariable, die für einen Zufallsgenerator $\mathcal{G}_n$ definiert ist, der durch eine n-malige Wiederholung von $\mathcal{G}$ zustande kommt. Um dennoch einen Vergleich vornehmen zu können, muß deshalb die Fragestellung verändert werden. Dies geschieht in zwei Schritten. In einem ersten Schritt wird die Fragestellung in ein Problem der aleatorischen Wahrscheinlichkeitsrechnung transformiert. In einem zweiten Schritt kann dann ein Übergang zu epistemischen Wahrscheinlichkeitsaussagen vollzogen werden.

2. Eine Fragestellung der aleatorischen Wahrscheinlichkeitsrechnung erhält man durch die Definition einer Zufallsvariablen

$$|\, \dot{Z}_n[\tilde{x}]/n - p_{\tilde{x}} \,|$$

Man muß allerdings darauf achten, daß sich diese Zufallsvariable nicht unmittelbar auf den Zufallsgenerator $\mathcal{G}$, sondern auf den repetitiven Zufallsgenerator $\mathcal{G}_n$ bezieht. Weiterhin ist auch klar, daß über diese Zufallsvariable nur Wahrscheinlichkeitsaussagen gemacht werden können.

3. Der weitere Gedankengang bezieht sich auf aleatorische Wahrscheinlichkeiten der Form[24]

$$\Pr[\mathcal{G}_n](\,|\,\dot{Z}_n[\tilde{x}]/n - p_{\tilde{x}}\,| < a)$$

wobei a eine beliebig kleine positive Zahl ist. Man kann nämlich zeigen, daß diese Wahrscheinlichkeit für hinreichend große Zahlen n beliebig an den Wert 1 angenähert werden kann. Diese Aussage wurde zum erstenmal von J. Bernoulli in seiner *Ars conjectandi* entwickelt; sie wird oft *Bernoullis Gesetz der großen Zahlen* genannt, obwohl es sich natürlich nicht um ein Gesetz, sondern um einen mathematischen Satz handelt.

4. Um Bernoullis „Gesetz“ zu verstehen, ist es am einfachsten, sich zunächst eine andere Aussage zu überlegen, nämlich die Ungleichung

$$\text{Für alle } a > 0: \quad \Pr[\mathcal{G}](\,|\,\dot{X} - \mathrm{M}(\dot{X})\,| \geq a) \;\leq\; \frac{\mathrm{V}(\dot{X})}{a^2} \tag{4.5.11}$$

wobei $\dot{X}$ eine beliebige Zufallsvariable ist, die für irgendeinen Zufallsgenerator $\mathcal{G}$ definiert ist. Sie wird *Tschebyscheffsche Ungleichung* genannt (nach dem Mathematiker P. L. Tschebyscheff 1821–1894). Ihre Richtigkeit ist leicht einzusehen. Sei a eine beliebige positive Zahl. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(\dot{X}) &= \textstyle\sum_{\tilde{x}\in\tilde{\mathcal{X}}} (\tilde{x} - \mathrm{M}(\dot{X}))^2 \Pr[\mathcal{G}](\dot{X} = \tilde{x}) \\
&\geq \textstyle\sum_{\tilde{x}\in\{\tilde{x}' \,|\, a \leq |\,\tilde{x}' - \mathrm{M}(\dot{X})\,|\,\}} (\tilde{x} - \mathrm{M}(\dot{X}))^2 \Pr[\mathcal{G}](\dot{X} = \tilde{x}) \\
&\geq \textstyle\sum_{\tilde{x}\in\{\tilde{x}' \,|\, a \leq |\,\tilde{x}' - \mathrm{M}(\dot{X})\,|\,\}} a^2 \Pr[\mathcal{G}](\dot{X} = \tilde{x}) \\
&= a^2 \Pr[\mathcal{G}](\,|\,\dot{X} - \mathrm{M}(\dot{X})\,| \geq a)
\end{aligned}$$

woraus (4.5.11) unmittelbar folgt.

5. Unter Zuhilfenahme der Tschebyscheffschen Ungleichung kann die Aussage von Bernoulli auf einfache Weise bewiesen werden. Sei nämlich a eine beliebige positive Zahl und n eine natürliche Zahl. Dann ist

$$\Pr[\mathcal{G}_n](\,|\,\dot{Z}_n[\tilde{x}]/n - p_{\tilde{x}}\,| \geq a) \;=$$

$$\Pr[\mathcal{G}_n](\,|\,\dot{Z}_n[\tilde{x}] - np_{\tilde{x}}\,| \geq na) \;\leq\; \frac{n\,p_{\tilde{x}}\,(1-p_{\tilde{x}})}{(na)^2} \;=\; \frac{p_{\tilde{x}}\,(1-p_{\tilde{x}})}{na^2}$$

Die rechte Seite geht aber für $n \to \infty$ gegen 0. Also konvergiert

$$\Pr[\mathcal{G}_n](\,|\,\dot{Z}_n[\tilde{x}]/n - p_{\tilde{x}}\,| < a) \;=\; 1 - \Pr[\mathcal{G}_n](\,|\,\dot{Z}_n[\tilde{x}]/n - p_{\tilde{x}}\,| \geq a)$$

gegen 1.

[24]Die folgende Schreibweise weicht etwas von unserer Standardnotation ab, ist aber vermutlich ohne weitere Erläuterungen verständlich.

4.5.4 Wahrscheinlichkeiten und Erwartungen

1. Bernoullis „Gesetz“ hat in der Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine wichtige, allerdings auch kontrovers diskutierte Rolle gespielt.[25] Von Bernoulli selbst wurde es unmittelbar mit einer metaphysischen Spekulation verknüpft, die zum Beispiel in folgender Bemerkung zum Ausdruck kommt (Bernoulli 1713/1999, S. 265):

> „Wenn also alle Ereignisse durch alle Ewigkeit hindurch fortgesetzt beobachtet würden (wodurch schliesslich die Wahrscheinlichkeit in volle Gewissheit übergehen müsste), so würde man finden, dass Alles in der Welt aus bestimmten Gründen und in bestimmter Gesetzmässigkeit eintritt, dass wir also gezwungen werden, auch bei noch so zufällig erscheinenden Dingen eine gewisse Nothwendigkeit, und sozusagen ein Fatum anzunehmen.“

Dagegen sollte zunächst betont werden, daß es sich bei seinem „Gesetz“ um eine Aussage der aleatorischen Wahrscheinlichkeitsrechnung handelt. Sofern sie einen Realitätsbezug hat, bezieht sie sich auf Zufallsgeneratoren bzw. auf Ereignisse, die durch Prozesse entstehen, die sinnvoll als Realisationen von Zufallsgeneratoren interpretiert werden können.

2. Aber auch wenn man sich zum Verständnis von Bernoullis „Gesetz“ auf Zufallsgeneratoren bezieht, liefert es nicht unmittelbar eine Brücke zwischen Wahrscheinlichkeiten und Häufigkeiten. Es handelt sich vielmehr um eine Wahrscheinlichkeitsaussage über eine Zufallsvariable $\dot{Z}_n[\tilde{x}]/n$, die Wiederholungen von Realisationen eines Zufallsgenerators repräsentiert: Wenn die Anzahl der Wiederholungen n sehr groß ist, ist die aleatorische Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich Werte von $\dot{Z}_n[\tilde{x}]/n$ nur wenig von $p_{\tilde{x}}$ unterscheiden, nahezu gleich 1. Der Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeiten und relativen Häufigkeiten wird also nur indirekt durch eine Wahrscheinlichkeitsaussage hergestellt. Und zwar durch eine *aleatorische* Wahrscheinlichkeitsaussage, also durch eine Aussage, die selbst modaler Natur ist und sich auf Eigenschaften eines Zufallsgenerators bezieht; und zwar in diesem Fall auf Eigenschaften eines *repetitiven*, durch Wiederholungen definierten Zufallsgenerators.

[25]In der Wahrscheinlichkeitstheorie sind viele weitere Grenzwertsätze untersucht worden. Man unterscheidet grob zwischen Gesetzen der großen Zahlen, den zentralen Grenzwertsätzen und den Sätzen über iterierte Logarithmen. Die Gesetze der großen Zahlen charakterisieren das durchschnittliche Verhalten von Summen von Zufallsvariablen. Dabei kann man einerseits „schwache Gesetze“ (etwa Bernoullis Satz) formulieren, die sich auf Grenzwerte von aleatorischen Wahrscheinlichkeiten bei endlichen Wiederholungen beziehen. Andererseits kann man auch „starke Gesetze“ formulieren. Dazu muß man aber Wahrscheinlichkeitsaussagen über unendliche Folgen von Wiederholungen definieren. Die zentralen Grenzwertsätze charakterisieren die Fluktuationen um das durchschnittliche Verhalten von Summen von Zufallsvariablen, und die Sätze über iterierte Logarithmen geben obere und untere Schranken für Abweichungen vom durchschnittlichen Verhalten an, wobei wieder Wahrscheinlichkeitsaussagen für unendliche Folgen definiert werden müssen. Man vgl. hierzu z. B. P. Billingsley (1979).

3. Von Aussagen dieser Art führt jedoch kein unmittelbarer Weg zu Erwartungen. Vielmehr ist noch eine explizite Argumentation erforderlich, um zur Begründung von epistemischen Wahrscheinlichkeitsaussagen zu gelangen, die sich auf Hypothesen beziehen, die eine Menge realisierter oder realisierbarer Situationen Ω_n betreffen. Um die erforderliche Argumentation zu verdeutlichen, betrachten wir eine Hypothese, die sich auf die relative Häufigkeit von $\tilde{x}$ in einer Menge Ω_n bezieht, die aus n Situationen besteht, die mit dem Zufallsgenerator $\mathcal{G}$ erzeugt worden sind. Eine solche Hypothese kann folgendermaßen formuliert werden:

$$\langle\, \Omega_n, \big\{\tilde{k}_n \in \tilde{K}^n \,\big|\, a > \mid \frac{\dot{Z}_n[\tilde{x}](\tilde{k}_n)}{n} - p_{\tilde{x}} \mid \big\}\,\rangle$$

Diese Hypothese bezieht sich auf *eine bestimmte* Menge Ω_n von Situationen, die mit dem Zufallsgenerator $\mathcal{G}$ erzeugt worden sind oder erzeugt werden könnten, und deutet sie als *ein* Ergebnis eines repetitiven Zufallsgenerators $\mathcal{G}_n$; sie besagt, daß in *dieser* Menge von Situationen die relative Häufigkeit von $\tilde{x}$ von $p_{\tilde{x}}$ um weniger als a abweicht. Um den Satz von Bernoulli für eine epistemische Wahrscheinlichkeitsaussage über eine solche Hypothese verwenden zu können, muß also zunächst ein Zusammenhang zwischen epistemischen und aleatorischen Wahrscheinlichkeiten hergestellt werden. Es liegt natürlich nahe, dabei so vorzugehen, wie in Abschnitt 4.2.2 besprochen worden ist:

$$\mathrm{P_e}\Big(\langle\, \Omega_n, \big\{\tilde{k}_n \in \tilde{K}^n \,\big|\, a > \mid \frac{\dot{Z}_n[\tilde{x}](\tilde{k}_n)}{n} - p_{\tilde{x}} \mid \big\}\,\rangle\Big) :=$$
$$\Pr[\mathcal{G}_n]\Big(\mid \frac{\dot{Z}_n[\tilde{x}]}{n} - p_{\tilde{x}} \mid < a\Big)$$

Dann kann man den Wert der aleatorischen Wahrscheinlichkeit als ein Argument verwenden, um die epistemische Wahrscheinlichkeit zu begründen.

Teil II

Probabilistische Sozialstatistik

Kapitel 5

Fiktive Zufallsgeneratoren

Von *probabilistischer Sozialstatistik* sprechen wir in diesem Text, um Varianten statistischer Sozialforschung zu charakterisieren, die davon ausgehen, daß man für das Zustandekommen sozialer Sachverhalte Wahrscheinlichkeiten unterstellen kann. Wie bereits in der Einleitung erläutert wurde, geht es hierbei nicht um das Zustandekommen von *Daten* zur Erfassung sozialer Sachverhalte, die – für ihre Beobachtung – als gegebene Sachverhalte vorausgesetzt werden. Es geht also insbesondere nicht darum, daß sozialstatistische Daten durch zufällige Auswahlverfahren zustande kommen können und man infolgedessen Wahrscheinlichkeitsaussagen auf die zur Erzeugung von Stichproben verwendeten Auswahlverfahren beziehen kann. Von probabilistischer Sozialstatistik soll vielmehr dann gesprochen werden, wenn unterstellt wird, daß man auch über die sozialen Prozesse, durch die soziale Sachverhalte entstehen, sinnvoll mit Begriffsbildungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung sprechen kann. In diesem und den folgenden Kapiteln soll untersucht werden, wie diese Auffassung in der Entwicklung der Sozialstatistik entstanden ist und zu durchaus fragwürdigen Vorstellungen über gesellschaftliche Verhältnisse und ihre historische Entwicklung geführt hat.

5.1 Verteilungsgesetze

1. Als Ausgangspunkt kann das Wort ‘Verteilungsgesetz’ dienen, das in der statistischen Literatur sehr oft verwendet wird. Soweit mit dem Wort auf den Begriff einer statistischen Verteilung verwiesen werden soll, ist es leicht verständlich. Man denke an eine statistische Variable $X : \Omega \longrightarrow \tilde{\mathcal{X}}$. Ω ist eine Menge von Situationen oder Objekten; $\tilde{\mathcal{X}}$ ist eine Menge von Merkmalswerten, durch die die Mitglieder von Ω charakterisiert werden können; die statistische Variable X ist eine Abbildung, die jedem Element aus Ω seine Charakterisierung in $\tilde{\mathcal{X}}$ zuordnet. Eine solche statistische Variable kann folglich durch eine Häufigkeitsverteilung

$$\mathrm{P}[X] : \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{X}}) \longrightarrow \mathbf{R}$$

charakterisiert werden, die jeder Teilmenge $\tilde{X} \subseteq \tilde{\mathcal{X}}$ (jedem Element der Potenzmenge $\mathcal{P}(\tilde{\mathcal{X}})$) die relative Häufigkeit $\mathrm{P}[X](\tilde{X})$ zuordnet, mit der Merkmalswerte aus $\tilde{X}$ in der Gesamtheit Ω vorkommen. Die Funktion $\mathrm{P}[X]$ zeigt die *Verteilung* der durch $\tilde{\mathcal{X}}$ gegebenen Merkmale in der Gesamtheit Ω und wird dementsprechend eine *Häufigkeitsfunktion* genannt.

2. Bei einer Häufigkeitsfunktion handelt es sich allerdings nicht um ein

Gesetz. Vielmehr zeigt sie, mit welchen Häufigkeiten eine Reihe vorgegebener Merkmale in einer Gesamtheit von Dingen, Menschen oder Situationen auftreten. Sie liefert eine spezifische (statistische) Beschreibung einer Menge von Dingen oder Situationen. Das Wort 'Gesetz' verweist hingegen auf Unterstellungen, die mit dem Begriff einer Häufigkeitsfunktion nicht unmittelbar verknüpft werden können. Es vermittelt die Konnotation, daß irgendetwas so sein muß, wie es durch ein Gesetz „angeordnet“ oder „vorgeschrieben“ wird. Aber das ist bei Häufigkeitsverteilungen, wie sie in der Sozialstatistik ermittelt werden, typischerweise nicht der Fall. Solche Häufigkeitsverteilungen können sich nicht nur verändern; man weiß, daß sie sich im Zeitablauf ändern. Warum also sprechen Statistiker gleichwohl oft von einem Verteilungs*gesetz*?

3. Der Sprachgebrauch hat unterschiedliche geistesgeschichtliche Hintergründe. Eine der Traditionslinien verweist auf die Wahrscheinlichkeitstheorie. Denkt man an ihre historische Entwicklung, hat sie sich zunächst als eine Theorie der Zufallsgeneratoren entwickelt. Wie statistische Variablen können auch Zufallsgeneratoren durch Häufigkeitsfunktionen charakterisiert werden. Zwar beziehen sich Häufigkeitsfunktionen dann nicht unmittelbar auf relative Häufigkeiten in statistischen Gesamtheiten, sondern auf Realisierungsmöglichkeiten von Sachverhalten bzw. auf Wahrscheinlichkeiten; man denke z. B. an Zufallsgeneratoren in Gestalt von Würfeln oder Urnen, aus denen Kugeln gezogen werden. Es macht aber auch in diesem Kontext Sinn, von einer Verteilung, genauer von einer *Wahrscheinlichkeitsverteilung*, zu sprechen. Jeder Zufallsgenerator kann durch eine bestimmte Wahrscheinlichkeitsverteilung charakterisiert werden. Dadurch wird in einer abstrakten Weise zum Ausdruck gebracht, wie der Zufallsgenerator funktioniert. Somit wird auch verständlich, in welcher Weise in der Wahrscheinlichkeitstheorie von einem Verteilungsgesetz gesprochen wird: Das Wort bezieht sich in diesem Kontext auf die Funktionsweise eines Zufallsgenerators; diese Funktionsweise wird durch die Angabe einer Wahrscheinlichkeitsverteilung charakterisiert. Insofern gibt in diesem Zusammenhang eine Wahrscheinlichkeitsverteilung das „Gesetz“ an, nach dem ein Zufallsgenerator funktioniert.

4. Aber liefert diese Verwendung des Wortes 'Verteilungsgesetz' zur Charakterisierung von Zufallsgeneratoren auch einen Zugang zum Verständnis entsprechender Redeweisen in der Statistik? Man kann versuchen, einen Zusammenhang herzustellen. Angenommen, daß man sich auf einen Zufallsgenerator beziehen kann; dann kann man ihn verwenden, um eine Menge von Situationen zu erzeugen. Zum Beispiel kann man einen Würfel nehmen und n-mal würfeln. Als Ergebnis erhält man eine statistische Gesamtheit, eine Menge Ω, die aus n Situationen besteht, die mit Hilfe des Zufallsgenerators erzeugt worden sind. Dazu korrespondierend kann man eine statistische Variable X definieren, um die in den einzelnen Situationen realisierten Merkmalswerte zu repräsentieren. Schließlich kann man die

Häufigkeitsverteilung von X berechnen und erhält eine *statistische* Verteilung. Sie entspricht zwar nicht genau der Wahrscheinlichkeitsverteilung, die den Zufallsgenerator charakterisiert. Aber wie in der Wahrscheinlichkeitstheorie gezeigt wird, kann man gleichwohl Wahrscheinlichkeitsaussagen machen, die sich auf den Zusammenhang zwischen der Wahrscheinlichkeitsverteilung eines Zufallsgenerators und statistischen Verteilungen in Gesamtheiten von Situationen, die mit dem Zufallsgenerator erzeugt werden, beziehen (vgl. Abschnitt 4.5.3).

5. Stellt man auf diese Weise einen Zusammenhang her, wird zwar die für Ω ermittelte statistische Verteilung nicht zu einem Verteilungsgesetz. Aber man hat auf eine nachvollziehbare Weise einen Zusammenhang zwischen einer statistischen Verteilung und einem Verteilungsgesetz hergestellt. Das Verteilungsgesetz charakterisiert den Zufallsgenerator. Die für die Herstellung des Zusammenhangs entscheidende Voraussetzung besteht darin, daß die Mitglieder einer statistischen Gesamtheit Ω *durch einen Zufallsgenerator erzeugt* worden sind. Dies macht es in gewisser Weise möglich, die für Ω ermittelte statistische Verteilung durch ein Verteilungsgesetz zu erklären. Es handelt sich um eine Erklärung, weil bzw. insoweit ein Prozeß charakterisiert wird, durch den der zu erklärende Sachverhalt (in diesem Fall eine statistische Verteilung) zustande gekommen ist.

6. Man kann in diesem Fall von einer *probabilistischen Erklärung* sprechen. Sie liefert kein Wissen darüber, wie in jedem Einzelfall der Prozeß abläuft, der zu einem bestimmten Ergebnis führt. Vielmehr bezieht sie sich auf eine Häufigkeitsverteilung von Merkmalen bei einer Gesamtheit von Situationen, die mit einem Zufallsgenerator erzeugt worden sind. Allerdings setzen solche Erklärungen voraus, daß man sich auf Zufallsgeneratoren beziehen kann, durch die statistische Gesamtheiten zustande kommen. *Wenn* dies der Fall ist, kann man sich auf ein Verteilungsgesetz berufen, um in abstrakter Weise den Prozeß zu charakterisieren, durch den in einer Gesamtheit von Situationen, Objekten oder Ereignissen eine bestimmte statistische Verteilung von Merkmalen zustande kommt. Aber unter welchen Umständen und mit welcher Berechtigung kann man voraussetzen, daß eine Menge von Situationen oder Objekten durch einen Zufallsgenerator zustande gekommen ist? In der Wahrscheinlichkeitsrechnung braucht diese Frage nicht gestellt zu werden, da man sich dort mit *artifiziellen* Zufallsgeneratoren oder mit beliebig ausgedachten „Verteilungsgesetzen“ beschäftigt. Die Frage bekommt aber eine wichtige Bedeutung, wenn man Gedankengänge der Wahrscheinlichkeitstheorie für eine probabilistische Sozialstatistik verwenden möchte. Denn es ist offensichtlich, daß die Gesamtheiten der Sozialstatistik und die Eigenschaften ihrer Mitglieder *nicht* in irgendeinem realistischen Sinn des Wortes durch Zufallsgeneratoren entstehen. Welchen Sinn könnte es haben, gleichwohl *fiktive* Zufallsgeneratoren anzunehmen, durch die die Elemente einer sozialstatistischen Gesamtheit entstehen bzw. jeweils bestimmte Merkmale bekommen?

5.2 Fechners Kollektivmaßlehre

1. Die Idee, statistische Gesamtheiten durch fiktive Zufallsgeneratoren zu deuten, kann als Grundidee einer probabilistischen Sozialstatistik betrachtet werden. In Andeutungen und Beispielen findet man sie bereits bei J. Bernoulli, de Moivre, Laplace, Quetelet und anderen Autoren, die die Entwicklung einer probabilistischen Sozialstatistik vorbereitet haben. Als ein Beispiel dafür, wie diese Grundidee in den Anfängen der probabilistischen Sozialstatistik verfolgt worden ist, beschäftigen wir uns in diesem Abschnitt mit Fechners Kollektivmaßlehre. Gustav Theodor Fechner lebte 1801–1887 und ist hauptsächlich als Begründer der Psychophysik bekannt geworden. Sein statistisches Hauptwerk, die „Kollektivmaßlehre", wurde posthum 1897 von G. F. Lipps herausgegeben und hatte in den folgenden Jahrzehnten einen wichtigen Einfluß auf die Entwicklung der Statistik in Deutschland (Heidelberger 1987).

2. Um das Thema seiner Kollektivmaßlehre anzugeben, beginnt Fechner mit folgender Definition:

„Unter einem Kollektivgegenstand (kurz K.-G.) verstehe ich einen Gegenstand, der aus unbestimmt vielen, nach Zufall variierenden, Exemplaren besteht, die durch einen Art- oder Gattungsbegriff zusammengehalten werden.

So bildet der Mensch einen Kollektivgegenstand im weiteren Sinne, der Mensch von bestimmtem Geschlechte, bestimmtem Alter und bestimmter Rasse einen solchen im engeren Sinne, wie überhaupt das, was man den Umfang eines K.-G. nennen kann, sich nach der Ausdehnung des Gattungs- oder Artbegriffs, unter den er tritt, ändert.

Die Exemplare eines K.-G. können räumlich oder zeitlich verschieden sein und hiernach einen räumlichen oder zeitlichen K.-G. bilden. So können die Rekruten eines Landes oder Ähren eines Kornfeldes als Exemplare eines räumlichen K.-G. gelten. So giebt die (mittlere) Temperatur des 1. Januar, an einem gegebenen Orte durch eine Anzahl von Jahren verfolgt, ebenso viele Exemplare eines zeitlichen K.-G. Statt des 1. Januar kann man jeden anderen Jahrestag, statt eines bestimmten Tages einen bestimmten Monat, statt der Temperatur den Barometerstand setzen u.s.w. und wird damit Exemplare eben so vieler zeitlicher K.-G. erhalten." (Fechner 1897, S. 3)

Warum interessiert sich Fechner für solche Kollektivgegenstände? Er gibt zunächst folgende Antwort:

„Anthropologie, Zoologie, Botanik haben es überhaupt wesentlich mit K.-G. zu thun, da es sich darin nicht um eine Charakterisierung einzelner Exemplare, sondern nur um das handeln kann, was einer Gesamtheit derselben zukommt, die aus dem oder jenem Gesichtspunkte als Gattung oder Art in größerer oder geringerer Weite zusammengefasst wird. Die Meteorologie bietet nach eben angeführten Beispielen in ihren nicht periodischen Witterungsphänomenen zahlreiche Beispiele davon dar; und selbst in der Artistik lässt sich von solchen sprechen, sofern Bücher, Visitenkarten darunter gehören." (Fechner 1897, S. 3f.)

Es scheint also zunächst darum zu gehen, deskriptives Wissen über Gesamtheiten von Dingen oder Situationen zu gewinnen. Das kommt deutlich auch in folgender Bemerkung zum Ausdruck:

„Gelte es z. B. Rekruten eines gegebenen Landes, so fragt es sich: wie groß sind die Rekruten im Mittel, wie stark schwanken die einzelnen Maße um ihr Mittel, wie groß sind die größten und kleinsten, wie verhalten sich die Rekrutenmaße nach diesen Bestimmungen in den einzelnen Jahrgängen, wie in verschiedenen Ländern unter einander. Solche und damit zusammenhängende, später zu betrachtende Fragen lassen sich bei jedem K.-G. aufwerfen." (Fechner 1897, S. 4)

Soweit handelt es sich bei Fechners Kollektivmaßlehre um eine Analyse statistischer Variablen. Es gibt jedoch zwei Gesichtspunkte, die darüber hinausweisen.

3. Der erste Gesichtspunkt kommt bereits in der oben zuerst zitierten Definition zum Ausdruck: Ein Kollektivgegenstand im Sinne Fechners besteht aus *unbestimmt vielen* Elementen. Dem korrespondiert die Formulierung, daß ein K.-G. „durch einen Art- oder Gattungsbegriff zusammengehalten" wird. Ein Kollektivgegenstand in diesem Sinne unterscheidet sich offensichtlich von einer statistischen Gesamtheit, die stets aus einer bestimmten und mithin endlichen Gesamtheit von Dingen oder Situationen in unserer Erfahrungswelt besteht. Es handelt sich in diesem Fall um *definite* Gesamtheiten; das ist die entscheidende Voraussetzung, um sich empirisch auf eine Gesamtheit beziehen und statistische Variablen und Häufigkeitsverteilungen definieren zu können. Dagegen sind Kollektivgegenstände im Sinne Fechners *indefinite* Gesamtheiten, die aus einer *unbestimmten* Anzahl von Elementen bestehen. Zugrunde liegt eine Idee, die bereits in Abschnitt 2.7 angesprochen worden ist und sich bis heute in der statistischen Literatur findet: daß man sich, ausgehend von Art- oder Gattungsbegriffen, Mengen bilden könne, die alles umfassen, was unter den jeweiligen Begriff fallen *kann*. Zum Beispiel eine „Menge aller Menschen" oder eine „Menge aller Rekruten" oder eine „Menge aller Visitenkarten". Fechner weiß natürlich, daß man nicht unmittelbar empirisch über solche indefiniten Mengen sprechen kann. Empirisches Wissen kann man stets nur über definite Gesamtheiten gewinnen, deren Elemente sich in unserer Erfahrungswelt fixieren lassen. Aber sein Erkenntnisinteresse zielt dennoch auf die indefiniten Mengen, die den Gattungsbegriffen korrespondieren. Indem Fechner einige Menschen untersucht, möchte er etwas über die „Menge aller Menschen" herausfinden, Einsichten in die „Gattung Mensch" gewinnen.

4. Man kann natürlich bezweifeln, daß das möglich ist. Angenommen, man hat Informationen über die Lebensdauern bei einer bestimmten Menge von Menschen, die in der Vergangenheit gelebt haben. Mit welcher Berechtigung kann man solche Informationen verwenden, um Aussagen über die Lebensdauern der Mitglieder einer indefiniten „Menge aller Menschen" zu machen? Zu einer solchen Menge (wenn es sich überhaupt um eine nachvollziehbare Begriffsbildung handeln würde) würden ja auch alle Menschen gehören, die erst in der Zukunft geboren werden; aber was können wir heute schon über die Lebensdauern von Menschen wissen, die erst in einigen 100 Jahren geboren werden?

5. Fechner erörtert zwar Fragen dieser Art nicht, er führt jedoch einen zweiten Gesichtspunkt ein, der eine scheinbare Lösung des Problems vorstellbar machen soll.

„Über alle diese Einzelfragen [wie in den oben angeführten Zitaten angedeutet worden ist] erhebt sich eine allgemeinere, die wichtigste, um die es sich überhaupt in dieser Lehre handeln kann und demgemäß im folgenden handeln wird, die Frage nach dem Gesetze, wie sich die Exemplare eines K.-G. nach Maß und Zahl verteilen. Unter dem Ausdruck *Verteilung* aber ist die Bestimmung zu verstehen, wie sich die Zahl der Exemplare eines gegebenen K.-G. mit ihrer Größe ändert. Bei jedem, in einer größeren Zahl von Exemplaren vorhandenen K.-G. kommen die kleinsten und größten Exemplare, kurz Extreme, am seltensten vor, am häufigsten solche von einer gewissen mittleren Größe. Aber giebt es nicht ein allgemeines, auf alle oder wenigstens die meisten K.-G. anwendbares Gesetz der Abhängigkeit der Zahl von der Größe der Exemplare? In der That wird sich ein solches aufstellen lassen, und eine Hauptaufgabe des folgenden auf seine Feststellung gehen.“ (Fechner 1897, S. 4f.)

Die Idee besteht also darin, daß man bei (jedenfalls einigen) Kollektivgegenständen die Existenz eines Verteilungsgesetzes annehmen kann, das die Häufigkeitsverteilung der Merkmalsausprägungen „beherrscht“.[1]

6. Zum besseren Verständnis sollte darauf geachtet werden, daß Fechner das Wort ‘Verteilung’ in zwei unterschiedlichen Kontexten verwendet. Zunächst in einem empirischen Kontext, in dem man sich auf eine definite Gesamtheit beziehen kann. Oder anders gesagt: Man kann sich dann auf eine bestimmte Menge von Daten beziehen, z. B. auf die Körpergrößen von 1000 Rekruten oder auf 100 Zeitpunkte, zu denen man eine Temperatur festgestellt hat. In diesem Kontext kann man statistische Variablen der Form $X : \Omega \longrightarrow \tilde{\mathcal{X}}$ verwenden, wobei Ω auf eine definite Gesamtheit verweist und die statistische Variable X jedem Mitglieder der Gesamtheit einen bestimmten Merkmalswert in $\tilde{\mathcal{X}}$ zuordnet. Fechners Begriff einer Verteilung entspricht in diesem Kontext dem Begriff einer statistischen Häufigkeitsverteilung. Eine solche Häufigkeitsverteilung ist aber kein Verteilungsgesetz; sie bringt nur einen empirisch ermittelten Sachverhalt zum Ausdruck. Dem entspricht, daß in diesem Kontext die Menge Ω kein Kollektivgegenstand im Sinne Fechners ist. Ω besteht zum Beispiel aus 1000 Rekruten, aber der entsprechende Kollektivgegenstand im Sinne Fechners würde aus „allen Rekruten“ bestehen, aus der Gesamtheit aller Objekte, die unter den Gattungsbegriff ‘Rekrut’ fallen.

[1] Diese Formulierung, daß Verteilungsgesetze Merkmalsausprägungen „beherrschen“, durchzieht die statistische Literatur; Fechner verwendet sie z. B. auf S. 5 seines Buches.

7. Fechner verwendet indessen das Wort ‘Verteilung’ in begrifflich analoger Weise nicht nur für definite Gesamtheiten, sondern auch für seine Kollektivgegenstände. Darin besteht ja die Idee: daß man sich indefinite Mengen als durch Gattungsbegriffe definierbare Mengen in Analogie zu definiten Mengen vorstellen könne. Würde man dieser Idee folgen, könnte man also unsere Notation übernehmen und Ω als symbolischen Verweis auf eine indefinite Menge verwenden, die durch einen Gattungsbegriff definiert wird. Eine sich hieran anschließende Konzeption statistischer Variablen würde schließlich den Eindruck erwecken, daß es für jedes Mitglied eines Kollektivgegenstandes einen bestimmten Merkmalswert gibt (also auch z. B. für Rekruten, die heute noch nicht geboren sind), und würde es erlauben, von einer Merkmalsverteilung innerhalb des Kollektivgegenstands zu reden. Dies ist der zweite Kontext, in dem Fechner von Verteilungen spricht, und auf diesen Kontext bezieht sich auch seine Vorstellung von Verteilungs*gesetzen*.

8. Die Begriffsbildungen, die den zweiten Kontext erzeugen, in dem Fechner von Verteilungsgesetzen spricht, sind ersichtlich obskur. Hier setzt indessen der Versuch ein, diese begrifflichen Schwierigkeiten durch die Annahme zu vermeiden, daß die Elemente eines Kollektivgegenstands „zufällig“ – durch einen Zufallsgenerator – zustande kommen. An die Stelle der Annahme, daß es korrespondierend zu einem Gattungsbegriff auch bereits eine indefinite Menge von Dingen gibt, die unter den Gattungsbegriff fallen, tritt dann eine andere Vorstellung: *daß man sinnvoll von Prozessen sprechen kann*, die die Mitglieder eines Kollektivgegenstands bzw. ihre jeweils bestimmten Eigenschaften erzeugen. Dann ist es nicht erforderlich, sich auf indefinite Mengen zu beziehen (die Gesamtheit der Dinge oder Situationen, die die Prozesse erzeugen *könnten*), sondern man kann versuchen, sich auf die Prozesse und ihre Eigenschaften zu beziehen. Schließlich erlaubt diese Betrachtungsweise auch eine Explikation des Wortes ‘Verteilungsgesetz’, die nicht mehr auf eine Analogie zu statistischen Verteilungen angewiesen ist. Es ist ja diese Analogie, die zunächst dazu geführt hat, sich Kollektivgegenstände als indefinite Mengen vorzustellen. Definiert man dagegen einen Kollektivgegenstand durch Prozesse, die seine Elemente erzeugen, kann man versuchen, auch die weiteren Begriffsbildungen *auf die Prozesse* zu beziehen. Insbesondere kann der Begriff eines Verteilungsgesetzes auf die Prozesse bezogen werden, die die Mitglieder eines Kollektivgegenstands erzeugen, so wie dies in Abschnitt 5.1 bereits angedeutet worden ist.

5.3 Deutung durch Zufallsgeneratoren

1. Dann stellt sich allerdings die Frage, wie man geeignete Vorstellungen über die Prozesse bilden kann, durch die die Mitglieder eines Kollektivs entstehen bzw. jeweils bestimmte Eigenschaften bekommen. Das kann man sich in jedem Einzelfall überlegen. Wie und wodurch bekommen Rekruten ihre Körpergrößen? Wie und wodurch bekommen Erwerbstätige ihre Einkommen? Wie und wodurch kommt es an bestimmten Orten zu bestimmten Temperaturen? In jedem Fall müßte man zunächst die Prozesse untersuchen, durch die in unserer Erfahrungswelt Dinge und Situationen entstehen und jeweils bestimmte Eigenschaften bekommen. In der probabilistischen (Sozial-) Statistik wird indessen ein vollständig anderer Weg verfolgt: Die Prozesse werden nicht untersucht, sondern durch Zufallsgeneratoren gedeutet.

2. Wie die zu Beginn des vorangegangenen Abschnitts angeführten Zitate zeigen, bezieht sich Fechner auf eine große Vielzahl unterschiedlicher Kollektivgegenstände. Aber in keinem Fall untersucht er die Prozesse, die deren Mitglieder hervorbringen bzw. durch die sie jeweils bestimmte Eigenschaften bekommen. *Stattdessen* ist sein Grundgedanke, daß die Mitglieder eines Kollektivgegenstands „zufällig variieren". Auf diese Weise sucht er den Anschluß an Begriffsbildungen und Gedankengänge der Wahrscheinlichkeitsrechnung:

„... da nach dem Begriffe der K.-G. ein solcher aus *nach Zufall variierenden* Exemplaren besteht, finden jedenfalls auch die allgemeinen Wahrscheinlichkeitsgesetze des Zufalls – und jeder Mathematiker weiß, dass es solche giebt – darauf Anwendung. In der That werden die Verteilungsverhältnisse der K.-G. allgemein von solchen *beherrscht*, indes dieselben Wahrscheinlichkeitsgesetze bei physikalischen und astronomischen Maßbestimmungen nur *nebensächlich* für die Sicherheitsbestimmung der erlangten Mittelmaße in Betracht kommen, hiermit hier eine ganz andere und viel unwesentlichere Rolle spielen als in der Maßlehre der K.-G. Insofern aber der Zufall unter bestimmten, für die verschiedenen K.-G. verschiedenen äußeren und inneren Bedingungen spielt, lassen sich, durch alle Zufälligkeiten durch, die verschiedenen K.-G. durch charakteristische, aus ihren Verteilungsverhältnissen ableitbare Konstanten unterscheiden. Diese sind es, worin die Bestimmtheit derselben gegeneinander ruht; und diese gilt es mit Berücksichtigung der allgemeinen Wahrscheinlichkeitsgesetze aufzusuchen." (Fechner 1897, S. 5)

Wichtig ist die Annahme, daß die Mitglieder eines Kollektivgegenstands (bzw. ihre Eigenschaften) durch einen „zufälligen Prozeß" zustande kommen, so daß Begriffsbildungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, insbesondere die Idee der Verteilungsgesetze, anwendbar werden. Bemerkenswert ist auch, daß sich Fechner von Fragestellungen der Theorie der Beobachtungsfehler abgrenzt, bei der Begriffsbildungen der Wahrscheinlichkeitstheorie dienen, um Vorstellungen über Meßfehler zu bilden. Dadurch unterscheidet sich Fechner von Quetelet, der Abweichungen von statistischen Mittelwerten in Analogie zu Meßfehlern gedeutet hat.[2] Die letzten beiden Sätze in

[2] Anläßlich seiner Diskussion der von Quetelet verwendeten Normalverteilung, des „Gaußschen Gesetzes", schreibt Fechner (1897, S. 64): „Von Gauss selbst ist das Gesetz nicht für Kollektivabweichungen, als Abweichungen der einzelnen Exemplargrößen

dem angeführten Zitat deuten an, daß Fechner eine besonders wichtige Aufgabe auch darin sehen möchte, Verteilungen durch gewisse Maßzahlen charakterisierbar zu machen; etwa durch unterschiedliche Arten von Mittelwerten und Streuungsmaßen. Auch neuere Statistik-Lehrbücher sehen darin oft eine besonders wichtige Aufgabe. Für die Frage, ob und ggf. in welcher Weise man in der Sozialstatistik von Verteilungsgesetzen sprechen kann, ist das jedoch ohne Belang.[3]

3. Während bei Fechner die begriffliche Bezugnahme auf Gedankengänge der Wahrscheinlichkeitsrechnung oft nur in vagen Andeutungen besteht, haben dies nachfolgende Autoren sehr explizit gemacht. Exempla-

a von ihrem arithmetischen Mittel, sondern bemerkter- und bekanntermaßen für Beobachtungsfehler, als Abweichungen der einzelnen Beobachtungswerte eines Gegenstandes von ihrem arithmetischen Mittel aufgestellt; und an sich ist nichts weniger als selbstverständlich, dass eine Übertragung des Gesetzes von letzteren auf erstere stattfinde. In der That ist es doch von vornherein etwas sehr Anderes, Abweichungen vor sich zu haben, die wegen mangelnder Schärfe der Messinstrumente oder Sinne und zufälliger äußerer Störungen bei wiederholter Messung eines *einzelnen* Gegenstandes vom arithmetischen Mittel der Maße erhalten werden, und Abweichungen, welche die *vielen* Exemplare eines K.-G. von ihrem arithmetischen Mittel aus Gründen darbieten, welche in der Natur der Gegenstände selbst und der sie beeinflussenden äußeren Umstände gelegen sind. Es ließ sich also auch durchaus nicht a priori voraussagen, dass die Natur in diesen Abweichungen vom Mittel das Gesetz der Beobachtungsfehler befolgt, sondern galt erst, eine direkte Prüfung desselben an K.-G. selbt vorzunehmen." Schließlich schlägt Fechner auch eine Modifikation der Normalverteilung vor, die in der Lage ist, auch nichtsymmetrische Verteilungen darzustellen. Es sei indessen erwähnt, daß Fechner keineswegs der erste war, der – kritisch gegen Quetelet – allgemeinere Verteilungsfunktionen für statistische Gesamtheiten vorgeschlagen hat. Hinweise zur Geschichte finden sich u. a. bei Arne Fisher (1928, S. 181ff.).

[3] Eine ganz ähnlich konzipierte Suche nach „Konstanten" findet sich bei K. Pearson (1896, S. 256): „*Variation.* – If a curve be constructed, of which the ordinate y is such that $y\,dx$ measures the frequency with which an organ lying in size between x and $x + dx$, occurs in a considerable population (500 to 1000 or more), the constants which, for any particular organ for any particular animal determine the form of this curve, are termed the *constants of variation*, or more briefly, the variation of the given organ." Eine sehr allgemeine Formulierung findet sich auch bei F. Y. Edgeworth (1908, S. 499): „... the general problem which may be enunciated as follows: There are given numerous observations relating to the attributes or 'organs' of particular cases or individual specimens; each observation being of type $(x_t, y_t, z_t, \ldots)$, where $x_t, y_t, z_t, \ldots$ are concurrent values of the variables $x, y, z, \ldots$, which represent the attributes or organs that are under measurement. It is given also that if the set, or 'series' of observations were prolonged indefinitely, under unaltered conditions, the group of attributes thus constituted would (tend to) conform to a frequency-function, or 'surface' of any number of dimensions, of which the form is given: say, $w = f(x, y, z, \ldots; c_1, c_2, \ldots)$; $c_1, c_2, \ldots$ being constants, in general not given in magnitude. Such being the *data*, the *quæsita* are as follows. It is required to determine the most probable, or best available, values of the *primary* constants, the averages (mode, arithmetic mean, &c.) of the organs. It is required also to determine the constants $c_1, c_2, \ldots$ which constitute the *secondary* frequency-constants." Wie Fechner greift auch Edgeworth auf die Vorstellung zurück, daß sich die Beobachtungen unter gleichen Bedingungen beliebig vermehren lassen. Das erschließt den Zusammenhang zum Begriff eines Zufallsgenerators, wie er in der Wahrscheinlichkeitsrechnung verwendet wird.

risch sei auf Emanuel Czuber hingewiesen, der sich in einem Teil seiner „Wahrscheinlichkeitsrechnung“ (1908) mit der Kollektivmaßlehre beschäftigt. Wie schon Fechner sieht er ihr Ziel darin, zu Charakterisierungen von „Arten“ oder „Gattungen“ zu gelangen:

„Um eine Art oder Gattung von Objekten zu beschreiben, hat man einen solchen Komplex von Merkmalen zusammenzustellen, mit dessen Hilfe es möglich ist, über die Zugehörigkeit eines Objekts zur Gattung zu entscheiden; eine solche Beschreibung, eine *Gattungsbeschreibung*, erfordert die vergleichende Betrachtung einer Vielheit von Objekten; sie ist das Produkt einer Abstraktion, weil von manchen Eigenschaften, die bei der Individualbeschreibung notwendig wären, abgesehen wird. Die Gattungsbeschreibung bestimmt den Begriff der Gattung.“ (Czuber 1908, S. 344)

Czuber erinnert dann daran, daß man sich auch in der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Kollektivgegenstände bezieht, nämlich durch eine Bezugnahme auf Zufallsgeneratoren, durch die Mitglieder eines Kollektivgegenstands erzeugt werden können:

„Die Wahrscheinlichkeitsrechnung führt in den Ergebnissen wiederholter Versuchsreihen zu theoretisch konstruierten Kollektivgegenständen, für welche sich die Verteilung a priori angeben läßt, mit der dann die faktische Verteilung verglichen werden kann [. . .].“ (Czuber 1908, S. 350)

Dann folgt eine Bemerkung zu Quetelet:

Die Fehlertheorie operiert gleichfalls mit Kollektivreihen, als deren einfachster Vertreter eine Reihe wiederholter Messungen einer und derselben Größe anzusehen ist, und sie bedient sich einer Funktion, die die Verteilung der Fehler nach ihrer Größe beschreibt [. . .]. An diese Fälle knüpfen denn auch die ersten Ansätze zu einer Kollektivmaßlehre an, die von A. Quetelet stammen; dieser nahm ohne weiteres volle Analogie zwischen der Verteilung von Körperlängen, Brustumfängen u. dgl. einer großen Anzahl erwachsener Personen und der Wiederholungszahlen weißer (oder schwarzer) Kugeln in einer großen Anzahl gleich ausgedehnter Ziehungsreihen aus einer Urne an, die weiße und schwarze Kugeln in gleicher Menge enthält; die Grenzform dieser Verteilung ist das Gaußsche Exponentialgesetz $\phi(x)$.“ (Czuber 1908, S. 350)

Und schließlich wird der Ansatz von Fechner mit folgenden Bemerkungen erläutert und gewürdigt:

„Auch der eigentliche Begründer der Kollektivmaßlehre, G. Th. Fechner, schloß sich an dieses Gesetz an. Er nahm in seine Definition des Kollektivgegenstandes ausdrücklich das Moment der Zufälligkeit auf, indem er einen solchen als eine Gesamtheit von unbestimmt vielen *nach Zufall* variierenden Exemplaren erklärte, die durch einen Art- oder Gattungsbegriff zusammengehalten werden. Seine vielfachen Untersuchungen an bereits vorhandenen und an eigens geschaffenen Kollektivgegenständen führten ihn aber weiter. Während nämlich die zu $\phi(x)$ gehörige Verteilungskurve in Bezug auf ihre größte Ordinate Symmetrie aufweist, gelangte Fechner zu Kollektivreihen, die eine von der Symmetrie so stark abweichende Verteilung aufwiesen, daß die Asymmetrie als wesentlich, nicht als eine bloße Störung einer in der Natur der Sache gelegenen Symmetrie erkannt werden mußte. Er glaubte, dieser Tatsache mathematisch dadurch Rechnung tragen zu können, daß er das gewöhnliche (einfache) Gaußsche Gesetz zu einem *zweiseitigen* erweiterte, indem er die Verteilungskurve aus zwei Zweigen zusammensetzte, deren jeder einem Gesetz der Form $\phi(x)$, aber von ungleichem Präzisionsmaß, folgt und deren Gipfelpunkte zusammenfallen. Nicht in dieser anfechtbaren Erweiterung liegt Fechners Verdienst, sondern in der Schaffung einer Systematik für die Untersuchung von Kollektivgegenständen, in der Einführung einer Terminologie für diesen Zweig der angewandten Mathematik. Wiewohl er ihn durch die Betonung des Zufälligen mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung in Beziehung gebracht hatte, sah er ihn doch als selbständig an. In Wirklichkeit aber ist die Kollektivmaßlehre eine Fortbildung der Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung, deren Ziel ja in der Bestimmung relativer Häufigkeiten besteht, und anwendbar ohne Rücksicht darauf, nach welchem Prinzip der Kollektivgegenstand entstanden ist.“ (Czuber 1908, S. 350f.)

Hier wird also die Kollektivmaßlehre bereits ganz selbstverständlich als ein spezieller Zweig der angewandten Wahrscheinlichkeitsrechnung aufgefaßt. Die Frage, mit welcher Berechtigung für die Entstehungsprozesse von Kollektivgegenständen fiktive Zufallsgeneratoren unterstellt werden dürfen, wird nicht gestellt. Czuber gehört auch bereits einer Generation von wahrscheinlichkeitstheoretisch gebildeten Statistikern an, die wußten, daß man für jede beliebige empirische Verteilung ein „theoretisches Verteilungsgesetz“ (einen Zufallsgenerator) *konstruieren* kann. So erklärt sich auch, daß es für ihn ganz gleichgültig ist, „nach welchem Prinzip der Kollektivgegenstand entstanden ist“.[4]

[4]In der neueren statistischen Literatur kommt eine durchaus vergleichbare Haltung darin zum Ausdruck, daß Statistik als eine dem Anspruch nach *allgemeine* Methodenwissenschaft aufgefaßt wird. Zum Beispiel sagen Cox und Snell (1981, S. 3): „Statistical analysis deals with those aspects of the analysis of data that are not highly specific to particular fields of study. That is, the object is to provide concepts and methods that will, with suitable modification, be applicable in many different fields of application; indeed one of the attractions of the subject is precisely this breadth of potential application.“ Noch deutlicher heißt es bei Schaich (1990, S. 2): „Ihrer Eigenart nach sind die statistischen Methoden in ihrer theoretischen Grundlegung genau so wie in ihrer konkreten Anwendung vom *Erfahrungsbereich*, in welchem sie angewendet werden, *unabhängig*.“ Allerdings gibt es auch Gegenstimmen. Zum Beispiel hat A. P. Dempster (1987, S. 2) betont: „I believe that there needs to be much more integration of the logic of statistical inference with the reasoning processes used routinely by working scientists.“ Eine noch radikalere Position hat N. W. Henry vorgetragen. Bezugnehmend auf einen Aufsatz von D. Freedman (1997), in dem sich dieser mit Problemen und Ungereimtheiten statistischer Modellbildung beschäftigt, schreibt Henry (1997, S. 64): „I propose that one way to eliminate these problems is to give up the notion that statistics is an independent discipline. The problems themselves will remain, of course, but they will no longer underly something called the logic of statistical inquiry. Instead they will be part of the foundations of the disciplines in which probability and statistical models are used. Solutions . . . if that is the right word . . . will need to be phrased in terms of the language and concepts of the disciplines, and they may vary from one to another.“

4. Ganz ähnliche Auffassungen wurden auch von L. v. Bortkiewicz vertreten.[5] In seinem Buch „Die Iterationen“ (1917) beginnt Bortkiewicz mit folgender allgemeinen Definition einer *empirischen* Statistik:

„Faßt man beliebige Erscheinungen, die unter einen gemeinsamen Begriff fallen und sei es nur in bezug auf die räumlichen Grenzen, zwischen denen sie eingeschlossen sind, und in bezug auf den Zeitpunkt oder den Zeitabschnitt, in dem sie beobachtet werden, sei es außerdem noch in irgendwelcher Hinsicht miteinander übereinstimmen, gedanklich zusammen, so kommt ein Ganzes zustande, das man als eine *empirische Vielheit* bezeichnen kann. Dadurch, daß man die Elemente (Einzelfälle), aus denen sich eine empirische Vielheit zusammensetzt, als solche der Beobachtung unterwirft und die so gewonnenen Beobachtungsresultate summiert, macht man die betreffende empirische Vielheit zum Gegenstand der *Statistik*. Denn Statistik ist nichts anderes als eine auf ‘Massenbeobachtung’ und Summierung ihrer Ergebnisse beruhende Erkenntnis empirischer Vielheiten.“ (v. Bortkiewicz 1917, S. 1)

Dann wird jedoch der Ansatz einer *probabilistischen* Sozialstatistik auf folgende Weise eingeführt:

„Empirische Vielheiten, sofern sie Gegenstand der Statistik [. . .] sind, brauchen nicht unbedingt aus großen Zahlen von Elementen zu bestehen oder selbst in größerer Zahl auftreten. Wohl aber ist beides oder mindestens eines von beidem erforderlich, wenn es gilt, über das Verhalten irgendwelcher empirischer Vielheiten vom Standpunkte der *Wahrscheinlichkeitstheorie* aus etwas auszusagen. Diesem Standpunkte zufolge werden nämlich die Elemente, aus denen sich die betreffenden empirischen Vielheiten zusammensetzen, unter die Herrschaft des ‘Zufalls’ gestellt und wird die dadurch bedingte Unbestimmtheit und Unberechenbarkeit des Verhaltens der empirischen Vielheiten auf die Weise überwunden, daß man sie aus hinreichend zahlreichen Elementen bestehen oder in hinreichend großer Zahl auftreten läßt.“ (v. Bortkiewicz 1917, S. 2f.)

Die probabilistische, an Vorstellungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung orientierte Statistik beginnt also mit der Annahme, daß die Elemente einer empirischen Vielheit (einer statistischen Gesamtheit) bzw. ihre Eigenschaften durch einen als Fiktion unterstellten Zufallsgenerator entstehen, der den Entstehungsprozeß der empirischen Sachverhalte beherrscht.

5.4 Kann der Ansatz begründet werden?

1. Während fiktive Zufallsgeneratoren in der heutigen statistischen Literatur fast immer als eine selbstverständliche Argumentationsvoraussetzung erscheinen, gab es in der Frühphase der Entwicklung einer probabilistischen (Sozial-) Statistik durchaus Diskussionen über die Frage, mit welcher Berechtigung statistische Gesamtheiten als durch fiktive Zufallsgeneratoren erzeugt aufgefaßt werden können. Z. B. schrieb H. Bruns in seiner „Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmasslehre“ (1906):

„Bei den Glücksspielen nämlich oder, allgemeiner gesprochen, bei den Vorgängen, die mit Sicherheit auf das Urnenschema reduziert werden können, hatten – das wußte man – die Begriffe Zufall und Wahrscheinlichkeit einen guten Sinn und führten bei weiterer Entwickelung auf Sätze, die die Probe der Erfahrung aushielten. Daraufhin vollzog sich nun, und zwar recht früh, die Unterschiebung, daß die Sätze der W.-R. schlechthin überall da anwendbar seien, wo überhaupt von Zufall und Wahrscheinlichkeit die Rede ist. Die Prüfung, ob denn die für die Zufälle und Wahrscheinlichkeiten eines Glücksspiels charakteristischen Merkmale jedesmal vorhanden seien, wurde einfach unterlassen.“ (Bruns 1906, S. 87)

Aber kann man die hier von Bruns verlangte Prüfung praktisch vornehmen? Wir glauben, daß dies nicht möglich ist und daß infolgedessen die Fragestellung verändert werden muß: Für welche Erkenntnisinteressen könnte es sinnvoll sein, Prozesse, durch die Sachverhalte und Ereignisse entstehen, so zu betrachten, *als ob* es sich um Realisationen von Zufallsgeneratoren handelt; und für welche anderen Erkenntnisinteressen könnte sich dies eher als ein Hindernis erweisen?

2. Um zu einer Diskussion der Fragestellung zu gelangen, können einige Überlegungen aus den „Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung“ von J. v. Kries (1886) einen Leitfaden liefern. Im Vergleich zu anderen Autoren setzen seine Überlegungen sehr grundsätzlich an. Er beginnt mit folgender Problemstellung:

„Wenn wir aus einem mit schwarzen und weissen Kugeln gefüllten Gefässe viele Male hintereinander je eine Kugel herausziehen, die gezogene immer wieder zurücklegen und mit den übrigen vermischen, und auf diese Weise in einer grossen Zahl von Ziehungen n Mal eine schwarze und m Mal eine weisse Kugel erhalten, so scheint der Schluss gerechtfertigt, dass das Zahlen-Verhältniss der in dem Gefässe enthaltenen schwarzen und weissen Kugeln sich nicht sehr erheblich von dem Werte n/m unterscheide. Demgemäss nehmen wir an, dass die Wahrscheinlichkeit, in einer folgenden Ziehung eine schwarze resp. weisse Kugel zu erhalten, sehr annähernd $= n/(n+m)$ resp. $m/(n+m)$ gesetzt werden dürfe. Man bezeichnet diese Verfahrungsweise als eine *aposteriorische Wahrscheinlichkeits-Bestimmung*. Legen wir uns die Frage vor, inwieweit dieselbe als eine allgemein anwendbare angesehen werden darf, so müssen wir darauf achten, dass für die in dem obigen Beispiele unfragliche Berechtigung derselben gewisse Kenntnisse in Betracht kommen, welche deutlich zum Bewusstsein zu bringen die gewöhnliche Darstellung unterlässt. So wissen wir schon sicher, dass bei Ziehungen aus einem Gefässe die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze oder weisse Kugel zu greifen, lediglich bestimmt wird durch das Zahlen-Verhältniss, in welchem solche vorhanden sind, dass jeder Ziehung, unabhängig von dem Erfolge aller anderen, eine bestimmte Chance des einen und des anderen Ergebnisses zuzuschreiben ist, dass die Zahl der Kugeln zwischen den einzelnen Ziehungen sich nicht verändert, mit einem Worte, dass die ganze zu beurteilende Erscheinung ein Zufalls-Spiel mit constanten Chancen und Unabhängigkeit der Einzelfälle darstellt. Was wir empirisch bestimmen, ist demnach nur der Zahlen-Wert dieser Chance. Hieraus geht

[5] Bortkiewicz lebte 1868 bis 1931. Biographische Angaben findet man bei Johnson und Kotz (1997, S. 181f.) und, etwas ausführlicher, bei Gumbel (1978).

hervor, dass die Anwendbarkeit jenes Verfahrens ganz und gar keine *allgemeine*, sondern eine an sehr wesentliche Voraussetzungen gebundene ist. Wenn, der üblichen Vorschrift entsprechend, bei jeder beliebigen Reihe gleichartiger Fälle, welche teils so, teils anders verlaufen, schlechtweg nach 'der Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Verlaufs in einem derartigen Falle' gefragt wird, so ist, wie schon früher hervorgehoben wurde, zunächst fraglich, ob ein Wert, welchem diese Bedeutung zuzuschreiben wäre, überhaupt existirt.“ (v. Kries 1886, S. 132f.)

Hieran anschließend bestimmt v. Kries die Aufgabe, mit der er sich im weiteren beschäftigen möchte, folgendermaßen:

„Demgemäss kann nun auch die Aufgabe, mit der wir uns hier beschäftigen, durchaus nicht darin bestehen, eine Methode zur numerischen Bestimmung irgend welcher ganz beliebiger Wahrscheinlichkeiten anzugeben; es wird vielmehr, entsprechend den wichtigen objectiven Voraussetzungen, welche in den Wahrscheinlichkeits-Sätzen zum Ausdruck gelangen, eine Begründung derselben zu fordern sein, welche weit mehr und ganz Anderes, als die blosse Bestimmung eines Zahlen-Wertes einschliesst. Wir überzeugen uns nun leicht, dass eine solche zum grossen Teile in Vorstellungen ganz allgemeiner Natur zu suchen ist, welche sich auf die Art und Weise, wie die betreffenden Erscheinungen zu Stande kommen, und auf das Verhalten der sie bedingenden Umstände beziehen.“ (v. Kries 1886, S. 133f.)

Wichtig erscheint vor allem der zuletzt ausgesprochene Gedanke: daß man sich auf die Prozesse beziehen muß, durch die Sachverhalte oder Ereignisse hervorgebracht werden. Das ist jedenfalls dann der Fall, wenn man in der Wahrscheinlichkeitsrechnung Ereignisse als *durch Zufallsgeneratoren erzeugt* konzipiert und infolgedessen nicht unmittelbar über Ereignisse spricht, sondern über Eigenschaften der Prozesse, durch die sie hervorgebracht werden.

3. v. Kries bezieht sich im weiteren zunächst auf explizit konstruierte Zufallsgeneratoren, deren Wahrscheinlichkeitsverteilung durch ihre Konstruktion begründbar erscheint. Dann geht es so weiter:

„Im Gegensatz zu den bisher betrachteten deductiven Ableitungen wollen wir nunmehr sehen, wie sich eine im engeren Sinne empirisch zu nennende, d. h. eine auf die Beobachtung der betreffenden Fälle selbst zu gründende Gewinnung von Wahrscheinlichkeits-Sätzen zu gestalten hat. Die erste Bedingung dafür, dass man überhaupt hoffen kann, eine zahlenmässige Wahrscheinlichkeit zu erhalten, ist offenbar die, dass eine Anzahl von Fällen, die eine gewisse Gleichartigkeit zeigen, zum Teil einen, zum Teil einen anderen Verlauf nehmen, dass bei den einen dieser, bei den anderen jener Erfolg auftritt. In einem derartigen Verhalten liegt schon eine gewisse Uebereinstimmung mit der Reihe einzelner Fälle eines Zufalls-Spiels. Diese Uebereinstimmung wird eine noch vollkommenere, wenn unsere Kenntnisse bezüglich jedes einzelnen Falles unvollständig sind, so dass der Erfolg jedesmal, wie beim Zufalls-Spiel, ungewiss erscheint. So beobachten wir z. B. im Laufe längerer Zeit eine grosse Zahl von Typhus-Fällen; ein Teil der Kranken stirbt, ein anderer Teil wird wieder gesund; und in jedem einzelnen Falle ist es nicht mit Sicherheit im Voraus anzugeben, ob das Eine oder das Andere

Statt finden werde. Unter solchen Umständen nun scheint es wenigstens denkbar, dass die ganze Erscheinungs-Reihe sich in der That einem gewöhnlichen Zufalls-Spiele analog verhalte: dass unsere Kenntnis des einzelnen Falles, welcher zufolge wir ihn als einen Typhus bezeichnen, einen gewissen Bereich des Verhaltens offen lasse, und dass innerhalb dieses vergleichbare und indifferente ursprüngliche Spielräume von bestimmtem Grössen-Verhältnis dem tötlichen Ausgange und der Genesung entsprechen. Es bestände alsdann für jeden Typhus-Fall eine gewisse Chance des einen und des anderen Verlaufes, und es erschiene als Sache des Zufalls, ob dieser oder jener eintritt.“ (v. Kries 1886, S. 140f.)

Es ist bemerkenswert, daß v. Kries hier von einer „Analogie“ spricht. Um mehr geht es zunächst auch nicht. Die Frage ist, ob man sich bei einigen der in unserer Erfahrungswelt wiederholt auftretenden Sachverhalte oder Ereignisse die Prozesse, durch die sie hervorgebracht werden, *in Analogie* zur Erzeugung von Sachverhalten oder Ereignissen durch Zufallsgeneratoren vorstellen kann. v. Kries' Gedankengang wird dann allerdings mit folgender Frage fortgesetzt: „Es fragt sich nun: wie kann die Ueberzeugung gewonnen werden, dass die Sache sich in Wirklichkeit so verhält?“ Die Formulierung ist durchaus merkwürdig, denn „in Wirklichkeit“ werden Typhus-Fälle natürlich nicht durch Zufallsgeneratoren erzeugt, sondern jeder einzelne Fall verdankt sich einem spezifischen Entstehungs- und Entwicklungsprozeß, den man unter Umständen auch genauer untersuchen könnte.

4. Man kann jedoch versuchen, die Überlegungen v. Kries' so zu verstehen, daß sie sich auf die Frage beziehen, welche Sinnvoraussetzungen erforderlich sind, um sich Entstehungsprozesse für Sachverhalte oder Ereignisse, z. B. für den tödlichen Ausgang von Typhus-Fällen, in Analogie zu Zufallsgeneratoren vorstellbar zu machen. v. Kries bespricht auch als nächstes eine solche Sinnvoraussetzung:

„Die erste und wesentlichste Frage ist offenbar die, ob für die betreffenden Verhältnisse irgendwelche allgemeine Bedingungen, deren Kenntnis zu der Angabe bestimmter Chancen berechtigte, wirklich constant bestehen. Wir erwähnten vorhin schon die Sicherheit analoger Voraussetzungen bei den Zufalls-Spielen; dass der Würfel, mit dem wir eine grössere Zahl von Würfen ausführen, dauernd die gleichen Bezeichnungen auf seinen Seiten trägt, dass das Gefäss, aus welchem wir Kugeln herausgreifen, vor jeder Ziehung dieselbe Zahl schwarzer und weisser Kugeln enthält u.s.w.: das unterliegt keinem Zweifel. Einer ganz beliebigen Reihe gleichartiger Erscheinungen gegenüber würde das entsprechende Verhalten nicht von vorn herein als sicher angenommen werden dürfen. Es wäre, wie man kurz sagen kann, erst zu prüfen, ob dieselbe sich überhaupt wie ein nach denselben Regeln dauernd fortgesetztes Zufalls-Spiel verhält.“ (v. Kries 1886, S. 141f.)

Damit wird offenbar auf eine wichtige Frage hingewiesen: Die Analogie zu einem Zufallsgenerator erfordert als eine Sinnvoraussetzung, daß die Prozesse, die die Sachverhalte oder Ereignisse hervorbringen, stets nach den gleichen Regeln ablaufen. Bei artifiziellen oder gedanklich konstruierten

Zufallsgeneratoren wird dies durch ihre Definition erreicht oder vorausgesetzt. Sie sind *als Verfahren definiert*, die in einer stets gleichbleibenden Weise (wobei der Sinn dieser Formulierung durch das Verfahren bestimmt wird) wiederholt werden können. Sollte sich z. B. nach dem Werfen herausstellen, daß ein Würfel zu einer Kugel geworden ist oder seine Beschriftung verloren hat, gilt der Wurf nicht mehr als ein Beispiel für das anfänglich definierte Würfelspiel; ebenso z. B. dann, wenn man den Würfel absichtsvoll so auf den Tisch legt, daß eine bestimmte Seite nach oben zeigt.

5. Aber wie verhält es sich mit dieser Sinnvoraussetzung, wenn man sich nicht auf artifizielle Zufallsgeneratoren bezieht oder, wie in der mathematischen Wahrscheinlichkeitsrechnung, sich mit gedanklich konstruierten Zufallsgeneratoren beschäftigt, bei denen die Wiederholbarkeit unter gleichen Bedingungen definitorisch vorausgesetzt werden kann? Denn darum handelt es sich ja in der probabilistischen Statistik: daß man Zufallsgeneratoren verwenden möchte, um Modelle für den Ablauf von Prozessen zu bilden, die in unserer Erfahrungswelt Sachverhalte und Ereignisse hervorbringen. v. Kries bemerkt, daß dann diese Sinnvoraussetzung geprüft werden sollte, und er versucht auch zu zeigen, wie eine solche Prüfung vorgenommen werden könnte:

> „Die Ueberzeugung nun, dass gewisse allgemeine, die Chancen des Verlaufs bestimmende Verhältnisse für eine Reihe gleichartiger Fälle in dauernder Constanz bestehn, kann offenbar auf die Thatsache gegründet werden, dass in einer sehr ausgedehnten Beobachtung die relative Häufigkeit der verschiedenen Verlaufsweisen dauernd sehr annähernd dieselbe geblieben ist. Man wird diesen Nachweis mit dem, was gewöhnlich aposteriorische Wahrscheinlichkeits-Bestimmung genannt wird, nicht verwechseln; es handelt sich nicht um die Ermittelung eines Zahlen-Wertes, welche im Allgemeinen aus einer Reihe von einigen hundert Fällen schon mit überschüssiger Sicherheit und Genauigkeit würde geschehen können, sondern es handelt sich um die Untersuchung, ob ein solcher Zahlen-Wert in der That in dauernder Constanz sich erhält. Dazu ist jedesmal die Beobachtung einer grösseren Anzahl derartiger Reihen erforderlich." (v. Kries 1886, S. 142f.)

Mit diesen Ausführungen nehmen die Überlegungen v. Kries' gewissermaßen eine pragmatische Wendung. Es bleibt auf bemerkenswerte Weise unbestimmt, was damit gemeint sein soll, „dass in einer sehr ausgedehnten Beobachtung die relative Häufigkeit der verschiedenen Verlaufsweisen dauernd sehr annähernd dieselbe geblieben ist". Wie verhält es sich z. B. bei den Typhus-Fällen, die v. Kries oben als Beispiel verwendet hat? Denkt man daran, wie sich die Behandlungsmöglichkeiten von Typhus seit den Tagen v. Kries' verändert haben, verläuft diese Krankheit heute sicherlich nicht mehr unter den gleichen allgemeinen Bedingungen wie damals. Versagt deshalb in diesem Fall die Analogie zu einem Zufallsgenerator?

6. Offenbar steht man vor dem gleichen Problem, das bereits in Zusammenhang mit den Überlegungen J. Bernoullis in Abschnitt 1.3 angesprochen worden ist. Man kann zwei unterschiedliche Standpunkte einnehmen.

Einerseits kann man grundsätzlich argumentieren, daß Zufallsgeneratoren keine angemessene Repräsentation von Prozessen liefern können, deren Regeln sich im Zeitablauf verändern. Man müßte dann konsequenterweise den Ansatz einer probabilistischen Sozialstatistik, wie er bisher charakterisiert worden ist, kritisieren. Denn nicht nur unterliegen die Prozesse, durch die soziale Sachverhalte und Ereignisse entstehen, einem fortwährenden Wandel und verlaufen unter fortwährend sich verändernden historischen Bedingungen; man kann außerdem darauf hinweisen, daß auch die Akteure dieser Prozesse lernfähig sind und mithin selbst eine Quelle immer neuer Spielregeln sind. — Andererseits kann man auch einen Standpunkt einnehmen, wie er bereits von J. Bernoulli vertreten worden ist (vgl. Abschnitt 1.3): Wenn die Bedingungen, unter denen Sachverhalte oder Ereignisse entstehen, einem historischen Wandel unterworfen sind, muß man gelegentlich neue Daten erheben, um die Eigenschaften der als Fiktionen unterstellten Zufallsgeneratoren mit ihrer Hilfe neu zu berechnen. Für die Annahme, daß sich Erscheinungen einem unterstellten Zufallsgenerator verdanken, wird dadurch gewissermaßen ein empirischer Vorbehalt formuliert. Die Annahme eines jeweils bestimmten Zufallsgenerators – z. B. einer bestimmten Sterbetafel – erscheint solange sinnvoll, bis neue Beobachtungen eine Revision erforderlich machen.[6]

7. Der Entwicklung der probabilistischen Sozialstatistik, bis hin zu den probabilistisch orientierten Varianten der gegenwärtigen empirischen Sozialforschung, liegt dieser pragmatische Standpunkt zugrunde.[7] Auch andere Befürworter einer probabilistischen Sozialstatistik, soweit sie sich mit der v. Kries'schen Frage nach der Berechtigung fiktiver Zufallsgeneratoren beschäftigt haben, enden regelmäßig mit einem pragmatischen Argument. Als Beispiel soll auf A. Tschuprow hingewiesen werden:

> „Im Gesetz der großen Zahlen haben wir das Werkzeug gefunden, mit deren Hülfe das roh-empirische Material der durch die statistische Beobachtung feststellbaren Häufigkeiten veredelt und der methodologisch wichtige Kern von der Schlacke des Zufälligen gereinigt werden kann. Ehe wir jedoch den folgenden Schritt im Ausbau des statistischen Verfahrens machen und zeigen, in welcher Weise die auf die allgemeinen Ursachen sich beziehenden Folgerungen, zu denen wir gelangen, verwertet werden können, muß der Nachweis geliefert werden können, daß unse-

[6] So kann man auch folgende Bemerkung von R. A. Fisher (1966, S. 25) verstehen: „In 'The Improvement of Natural Knowledge', that is, in learning by experience, or by planned chains of experimentation, conclusions are always provisional and in the nature of progress reports, interpreting and embodying the evidence so far accrued."

[7] Diese Formulierung sollte allerdings qualifiziert werden, denn der „pragmatische Standpunkt", wie er *im praktischen Handeln* tatsächlich eingenommen wird, impliziert gerade keine einfachen Gleichförmigkeitsannahmen. Es handelt sich bereits um ein fragwürdiges *Postulat* der Theoriebildung, wenn etwa gesagt wird: „The basic assumption is that what has been consistently true or true on the average, in the past, will continue to occur, with measurable limits of variation, in the future." (Cohen 1938, S. 671f.)

re deduktiv begründete Auffassung vom Zusammenhange zwischen den empirischen Häufigkeiten und den apriorischen objektiven Wahrscheinlichkeiten keine aus der Luft gegriffene Konstruktion ist, der kein praktischer Wert zukommt, sondern daß sie vielmehr durch die Erfahrung bestätigt wird. Gibt es überhaupt Verhältnisse, unter denen ein Zusammenhang zwischen den Häufigkeiten und den Wahrscheinlichkeiten tatsächlich nachweisbar ist? Sind namentlich diejenigen Verhältnisse, unter denen die Arbeit des Statistikers vor sich geht, derart, daß er das Recht hat, die von ihm beobachteten Häufigkeiten der Ereignisse als Realisationen von Wahrscheinlichkeiten zu betrachten, die nur durch Zufälligkeiten in dem theoretisch berechenbaren Maße verschleiert werden?“ (Tschuprow 1905, S. 38f.)

Es ist klar, wie die erste der beiden Fragen beantwortet werden kann: durch einen Hinweis auf *artifizielle* Zufallsgeneratoren:

„Die erste Frage läßt sich kurz durch den Hinweis auf die Experimente auf dem Gebiete der Zufallsspiele erledigen. In allen Fällen, wo das Experiment sorgfältig ausgeführt war, so daß der betrachteten Ereignisreihe tatsächlich dasjenige Ursachensystem zugrunde lag, für welches die Wahrscheinlichkeiten berechnet worden waren, hat die Erfahrung mit den theoretischen Vorausberechnungen sehr gut übereingestimmt.“ (Tschuprow 1905, S. 39)

Die wesentliche Schwierigkeit liegt allerdings in der zweiten Frage. Dazu sagt Tschuprow:

„. . . muß gezeigt werden, daß das Wahrscheinlichkeitsschema, das wir bis jetzt nur mit den Erfahrungen auf dem Gebiete der Zufallsspiele verglichen haben, auch auf die Massenerscheinungen anwendbar ist, welche der Statistiker zu erforschen hat. Es darf ja nicht jede aus einer Reihe von Beobachtungen abgeleitete Verhältniszahl als empirischer Ausdruck einer bestimmten objektiven Wahrscheinlichkeit aufgefaßt werden; damit dies der Fall sei, müssen gewisse Voraussetzungen erfüllt sein. Ob nun diese Voraussetzungen mit der Arbeitsweise des Statistikers übereinstimmen? A priori läßt sich diese Frage nicht entscheiden, da wir die statistisch erfaßbaren Erscheinungen und die sie bedingenden Ursachen nicht genau genug kennen. Die Lösung muß durch Betrachtung des empirischen Materials gewonnen werden, und das große Verdienst Lexis' ist eben, die Frage nach der Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf das Material der statistischen Forschung theoretisch scharf gestellt und genaue Methoden der Lösung derselben geschaffen zu haben.

Es ist ohne weiteres klar, daß die Betrachtung vereinzelter statistischer Zahlen zur Entscheidung der Frage nichts beitragen kann. Ob eine Sterblichkeit von so und so viel pro Mille als empirischer Ausdruck einer objektiven Wahrscheinlichkeit aufgefaßt werden darf, hierüber zu entscheiden, gibt es keine Mittel. Hat man dagegen eine Reihe von Häufigkeiten vor sich, die sich auf eine Anzahl verschiedener statistischer Massen beziehen, so läßt sich, wie Lexis gezeigt hat, entscheiden, ob sie alle als empirische Ausdrücke einer und derselben Wahrscheinlichkeit gelten dürfen.“ (Tschuprow 1905, S. 40)

Tschuprow bezieht sich in diesen Ausführungen auf die sog. Lexis'sche Dispersionstheorie, die erste Ausarbeitung eines Verfahrens der Varianzanalyse. Aber auch ohne die Details dieses Verfahrens zu kennen, kann

man verstehen, daß Tschuprows Argumentation unzureichend ist. Mit der von Lexis vorgeschlagenen Varianzanalyse kann man bestenfalls Hinweise darauf gewinnen, ob für zwei oder mehr statistische Gesamtheiten ein gemeinsamer Zufallsgenerator unterstellt werden kann. Aber das setzt schon voraus, daß man die Elemente jeder Gesamtheit als durch einen Zufallsgenerator erzeugt auffassen kann. Für die von Tschuprow eingangs gestellte Frage nach der Berechtigung dieser Annahme liefert das Lexis'sche Verfahren keine Antwort. Diese Frage ist auch unabhängig davon, ob man es mit nur einer oder mit mehreren statistischen Gesamtheiten zu tun hat; und insofern gilt auch Tschuprows Bemerkung, daß *diese* Frage überhaupt nicht empirisch entschieden werden kann.

8. Es ist allerdings klar, daß sich dadurch auch der Charakter der den Ansatz konstituierenden Annahme verändert: daß man soziale Sachverhalte und Ereignisse sinnvoll als durch fiktive Zufallsgeneratoren erzeugt auffassen könne. Es handelt sich nicht länger um eine Annahme, die durch eine empirische Untersuchung geprüft werden könnte, so wie dies v. Kries in den oben zitierten Ausführungen nahelegt. Denn ginge es darum, sie einer solchen Prüfung zu unterziehen, könnte sie jederzeit als unzutreffend zurückgewiesen werden. Vielmehr bekommt die Annahme den Charakter einer gedanklichen Fiktion, die es erlauben soll, über soziale Sachverhalte und Ereignisse so zu reden, *als ob* sie durch einen Zufallsgenerator zustande kommen. Die Frage ist dann nicht, ob man auf diese Weise eine sinnvolle und einsichtsvolle begriffliche Repräsentation sozialer Prozesse erreichen kann. Diese Frage, die sich einem soziologischen Erkenntnisinteresse verdankt, ist der probabilistischen Sozialstatistik ganz fremd. Stattdessen tritt eine praktische Frage in den Vordergrund: ob statistische Modelle, die auf Annahmen über fiktive Zufallsgeneratoren beruhen, zur Begründung konditionaler Erwartungen nützlich sein können.

Kapitel 6

Reale und fiktive Gesamtheiten

Im vorangegangenen Kapitel wurde besprochen, wie der Ansatz der probabilistischen Sozialstatistik auf der Vorstellung beruht, daß soziale Sachverhalte und Ereignisse durch als Fiktionen unterstellte Zufallsgeneratoren hervorgebracht werden. In der weiteren Entwicklung der Sozialstatistik im 20. Jahrhundert ist diese Vorstellung zunehmend mit einer anderen vermischt worden: daß man sich die jeweils verfügbaren Daten über soziale Sachverhalte und Ereignisse als zufällig zustande gekommene Stichproben aus „Gesamtheiten höherer Ordnung“ (Anderson 1935) vorstellen könne. Da diese Vermischung unterschiedlicher Gedankengänge viel zur Konfusion sowohl über Basisannahmen einer probabilistischen Sozialstatistik als auch über Konzeptionsmöglichkeiten „statistischer Inferenz“ beigetragen hat, soll sie in diesem Kapitel ausführlich besprochen werden.

6.1 Einleitende Bemerkungen

1. Die meisten neueren Lehrbücher zur statistischen Methodenlehre orientieren sich an der Vorstellung, daß sich statistische Daten auf Stichproben aus ihnen zurechenbaren Gesamtheiten beziehen. Eine typische Formulierung ist zum Beispiel:

> „Unter einer *Stichprobe* versteht man eine Teilmenge von Einheiten, die aus einer bestimmten Masse ausgewählt wurden, mit dem Ziel, daraus Schlüsse auf die Beschaffenheit dieser Masse zu ziehen. Die Masse selbst, die durch die Stichprobe untersucht werden soll, wird in der Stichprobentheorie als *Gesamtheit* bezeichnet.“ (Pfanzagl 1972, S. 139f.)

Weiterhin wird in der Methodenliteratur betont, daß man mit den Daten einer Stichprobe nur dann begründbare Aussagen über eine korrespondierende Gesamtheit machen könne, wenn es sich um eine zufällig ausgewählte Stichprobe handelt; zum Beispiel:

> „. . . müssen wir den Begriff der *Stichprobe aus einer Grundgesamtheit* präzisieren. Bisher genügte es zu wissen, daß es sich dabei um eine Auswahl von n Dingen aus einer gegebenen Gesamtheit G handelt oder, da das beobachtete Merkmal und weniger das Ding als solches interessiert, um n Zahlen (bzw. Zahlenpaare bei gleichzeitiger Beobachtung zweier Merkmale usw.).
>
> Die Stichprobe soll Aufschluß über die genannte Gesamtheit G geben, die man aus finanziellen, zeitlichen oder prinzipiellen Gründen nicht als Ganzes untersuchen kann. Damit sich dieser Aufschluß gewinnen läßt, muß die Stichprobe eine *Zufallsauswahl* darstellen. Dies bedeutet, sie muß so entnommen werden, daß jedes Ding in G eine ganz bestimmte angebbare Wahrscheinlichkeit hat, gezogen, d. h. der Stichprobe einverleibt zu werden.“ (Kreyszig 1968, S. 163)

Die Vorstellung ist also folgende: Man hat es mit einer bestimmten Gesamtheit von Dingen, Situationen oder Ereignissen zu tun und kann daraus mit Hilfe eines angebbaren Verfahrens auf zufällige Weise eine Teilmenge auswählen; insbesondere muß jedes Element der Gesamtheit ein Mitglied der Stichprobe werden können.

2. Diese Vorstellung hat zwei wichtige Implikationen. Erstens muß es sich um eine in unserer Erfahrungswelt real existierende Gesamtheit handeln, denn nur dann kann man einen Teil ihrer Mitglieder mit Hilfe eines angebbaren Verfahrens auswählen. Dinge oder Situationen, die es heute nicht mehr oder noch nicht gibt, können nicht Mitglieder einer Stichprobe werden, die durch ein heute anwendbares Verfahren definiert werden kann.[1] Zweitens impliziert der Gedankengang, daß Zufälligkeiten nur aus dem Auswahlverfahren resultieren können. Der Gedanke, daß die Gesamtheit aus Elementen besteht, deren Eigenschaften in irgendeinem Sinn „zufällig variieren“, kommt von vornherein nicht in Betracht. Die Elemente der Gesamtheit werden vielmehr mit jeweils bestimmten Eigenschaften vorausgesetzt, und von der Frage, wie diese Eigenschaften zustande gekommen sein könnten, wird vollständig abstrahiert.

3. Man kann sich den Sachverhalt anhand eines Urnenmodells verdeutlichen, das auch in der Literatur oft zur Erläuterung verwendet wird. Man stellt sich vor, daß jedes Mitglied der Grundgesamtheit durch eine Kugel in einer Urne repräsentiert wird und daß jede Kugel den Namen und die Eigenschaften des von ihr repräsentierten Objekts gewissermaßen als Inschrift hat. Das Auswahlverfahren besteht dann darin, einen Teil der Kugeln aus der Urne zufällig herauszuziehen. Das Modell macht deutlich, in welcher Weise man sich die Gesamtheit als eine *für das Auswahlverfahren vorausgesetzte Gegebenheit* vorzustellen hat. Offenbar können nur Kugeln aus der Urne gezogen werden, die in ihr enthalten sind; und es ist auch klar, daß das Auswahlverfahren nur einen Einfluß darauf hat, welche Kugeln ausgewählt werden, aber nicht auf ihre Eigenschaften.

4. Das Urnenmodell macht weiterhin deutlich, wie man sich Auswahlverfahren, durch die Zufallsstichproben definiert werden, als Zufallsgeneratoren vorstellen kann. Es handelt sich um Auswahlgeneratoren. Solche Auswahlgeneratoren erzeugen nicht die Dinge oder Eigenschaften, die man beobachten möchte, sondern sie wählen aus einer vorgegebenen Menge von Dingen einen Teil aus. Die Auswahlgeneratoren, durch die Zufallsstichproben zustande kommen, müssen also begrifflich strikt von den fiktiven Zufallsgeneratoren unterschieden werden, die in der probabilistischen Sozialstatistik als Modelle für Prozesse dienen sollen, durch die Dinge mit

[1] Diese eigentlich selbstverständliche Einsicht wird allerdings in der Methodenliteratur nicht von allen Autoren akzeptiert. Z. B. behauptet F. J. McGuigan (1968, S. 72), daß Stichproben auch aus „Populationen“ gezogen werden können, zu denen Menschen gehören, „who are as yet unborn“.

jeweils bestimmten Eigenschaften entstehen. Dem entsprechen auch zwei vollständig unterschiedliche Fragestellungen. In der probabilistischen Sozialstatistik möchte man Einsichten in Prozesse gewinnen, durch die soziale Sachverhalte und Ereignisse entstehen. Der theoretische Ansatz besteht darin, für diese Prozesse Zufallsgeneratoren zu unterstellen und dann zu versuchen, etwas über die Beschaffenheit dieser Zufallsgeneratoren herauszufinden. Auswahlgeneratoren sind demgegenüber nur ein methodisches Hilfsmittel, um zu – ihrer Intention nach – deskriptiven Aussagen über Merkmalsverteilungen in Gesamtheiten zu gelangen, die als in der Realität gegeben dem Auswahlverfahren vorausgesetzt werden. Es wäre in diesem Fall auch sinnlos, das Ziel darin zu sehen, Einsichten in den Zufallsgenerator zu gewinnen. Denn der Zufallsgenerator ist in der Stichprobentheorie ein Auswahlverfahren, das sich der Statistiker selbst gemacht hat und daß er infolgedessen von vornherein kennt und auch kennen muß, um Vermutungen über Merkmalsverteilungen in den Gesamtheiten, auf die sich die ausgewählten Stichproben beziehen, einschätzbar zu machen.

5. Man kann es auch so sagen: Auswahlverfahren beziehen sich auf „*daten*erzeugende Prozesse“, so wie dieser Ausdruck in Abschnitt 1.2 erläutert worden ist; dagegen beziehen sich die fiktiven Zufallsgeneratoren der probabilistischen Sozialstatistik ihrer Intention nach auf Prozesse, durch die soziale Sachverhalte und Ereignisse hervorgebracht werden. Die Unterscheidung ist offenbar wichtig, wenn man ein Verständnis der probabilistischen Sozialstatistik gewinnen möchte. Leider hat jedoch die Verbreitung des Denkschemas „Stichprobe – Grundgesamtheit“ in der Sozialstatistik dazu geführt, daß die Unterscheidung zwischen Auswahlverfahren und fiktiven Zufallsgeneratoren zunehmend unkenntlich geworden ist. Die begrifflichen Unklarheiten verdanken sich im wesentlichen dem irreführenden Gedanken, daß man sich auch die fiktiven Zufallsgeneratoren, die zur gedanklichen Repräsentation sozialer Prozesse dienen sollen, als Auswahlverfahren vorstellen könne. In den folgenden Abschnitten soll diesen Unklarheiten etwas genauer nachgegangen werden.

6.2 Der Ansatz R. A. Fishers

Für die Verbreitung der Vorstellung, daß man sich auch Zufallsgeneratoren, die sich ihrer Intention nach auf Prozesse beziehen, als Auswahlverfahren für vorgängig existierende Gesamtheiten vorstellen könne, hat insbesondere der Statistiker R. A. Fisher (1890–1962) eine wichtige Rolle gespielt.

6.2.1 Fiktive Populationen

1. In einer einflußreich gewordenen Abhandlung „On the Mathematical Foundations of Theoretical Statistics“ (1922) beginnt Fisher mit folgender Klage über die unbefriedigenden theoretischen Grundlagen der Statistik:

„Several reasons have contributed to the prolonged neglect into which the study of statistics, in its theoretical aspects, have fallen. In spite of the immense amount of fruitful labour which has been expended in its practical applications, the basic principles of this organ of science are still in a state of obscurity, and it cannot be denied that, during the recent rapid development of practical methods, fundamental problems have been ignored and fundamental paradoxes left unresolved.“ (Fisher 1922, S. 310)

Dann folgt ein Abschnitt über „the purpose of statistical method“, der mit folgenden Worten beginnt:

„In order to arrive at a distinct formulation of statistical problems, it is necessary to define the task which the statistician sets himself: briefly, and in its most concrete form, the object of statistical methods is the reduction of data. A quantity of data, which usually by its mere bulk is incapable of entering the mind, is to be replaced by relatively few quantities which shall adequately represent the whole, or which, in other words, shall contain as much as possible, ideally the whole, of the relevant information contained in the original data.“ (S. 311)

Die Formulierung klingt vertraut: Der Statistiker hat es mit einer oft großen Menge von Daten zu tun und möchte ihren „Informationsgehalt“ möglichst kurz und übersichtlich präsentieren, z. B. in Gestalt von Häufigkeitsverteilungen oder sie charakterisierenden Maßzahlen.[2]

2. Aus dieser Aufgabenbestimmung, die einen durchaus sinnvollen Leitfaden für die statistische Methodenlehre liefert, ergibt sich indessen kein Gesichtspunkt für eine probabilistische Statistik. Es ist deshalb bemerkenswert, wie die Überlegungen von Fisher weitergehen. Im Anschluß an das eben angeführte Zitat heißt es:

„This object is accomplished by constructing a hypothetical infinite population, of which the actual data are regarded as constituting a random sample. The law of distribution of this hypothetical population is specified by relatively few parameters, which are sufficient to describe it exhaustively in respect of all qualities under discussion. Any information given by the sample, which is of use in estimating the values of these parameters, is relevant information. Since the number of independent facts supplied in the data is usually far greater than the number of facts sought, much of the information supplied by any actual sample is irrelevant. It is the object of the statistical processes employed in the reduction of data to exclude this irrelevant information, and to isolate the whole of the relevant information contained in the data.“ (Fisher 1922, S. 311f.)

Die Idee, die Fishers Ansatz für eine probabilistisch konzipierte Statistik begründen soll, besteht also darin: daß man sich die jeweils verfügbaren Daten als eine „Zufallsstichprobe“, als aus einer hypothetischen Grundgesamtheit „zufällig zustande gekommen“, vorstellen soll.

[2] Eine ähnliche Formulierung findet sich bereits bei F. Galton (1908, S. 33): „The object of statistical science is to discover methods of condensing information concerning large groups of allied facts into brief and compendious expressions suitable for discussion.“

3. Um Fishers Idee zu verstehen, ist es wichtig, sie von der Konzeption eines sozialstatistischen Inferenzproblems abzugrenzen, bei dem man es mit einer Stichprobe aus einer definiten und infolgedessen endlichen Gesamtheit zu tun hat, deren Elemente in unserer Erfahrungswelt fixierbar sind und für die ein Auswahlverfahren effektiv definiert werden kann. Fishers „hypothetical infinite populations“ sind keine definiten Gesamtheiten im Sinn der Sozialstatistik, sondern begrifflich konstruierte *indefinite* Gesamtheiten. In dieser Hinsicht entsprechen sie ziemlich genau Fechners Kollektivgegenständen, mit denen wir uns in Abschnitt 5.2 beschäftigt haben.

4. So wie wir Fechners Konzeption der Kollektivgegenstände als eine etwas obskure Formulierung für die fiktive Unterstellung eines Zufallsgenerators zu verstehen versucht haben, kann man auch versuchen, die hypothetischen Populationen Fishers zu verstehen. Allerdings wird dann ein Problem noch deutlicher, auf das bereits bei der Diskussion von Fechners Ansatz hingewiesen worden ist. Die Redeweise von Populationen impliziert, daß es ihre Elemente mit jeweils bestimmten Eigenschaften in gewisser Weise schon gibt. Die Vorstellung ist, daß man sich eine Gesamtheit *bestimmter* Dinge oder Situationen oder Ereignisse zumindest vorstellen kann, so daß sich die in Gestalt einer Stichprobe vorliegenden Daten auf einen Teil dieser Sachverhalte beziehen. Wenn man also z. B. Daten über das Alter von 500 Studenten hat, impliziert Fishers Konzeption, daß man sich eine Gesamtheit aller Studenten vorstellen könne, die es jemals gegeben hat und geben wird; und es ist diese indefinite „Gesamtheit aller Studenten“, deren Altersverteilung ermittelt werden soll.

5. Ersetzt man Fishers hypothetische Populationen durch fiktive Zufallsgeneratoren, kann man zwar ein obskures Reden über indefinite Mengen (die Elemente enthalten, die es noch nicht gibt) vermeiden; es ist jedoch wichtig, daß sich einige zentrale Gedankengänge der probabilistischen Statistik gerade der Vorstellung verdanken, daß indefinite Populationen als Sachverhalte aufgefaßt werden können. Bei Fisher wird das besonders deutlich in seiner Konzeption des Wahrscheinlichkeitsbegriffs. Die Ausführungen in seiner oben zitierten Abhandlung (1922, S. 312) gehen so weiter:

„When we speak of the *probability* of a certain object fulfilling a certain condition, we imagine all such objects to be divided into two classes, according as they do or do not fulfil the condition. This is the only characteristic in them of which we take cognisance. For this reason probability is the most elementary of statistical concepts. It is a parameter which specifies a simple dichotomy in an infinite hypothetical population, and it represents neither more nor less than the frequency ratio which we imagine such a population to exhibit. For example, when we say that the probability of throwing a five with a die is one-sixth, we must not be taken to mean that of any six throws with that die one and one only will necessarily be a five; or that of any six million throws, exactly one million will be fives; but that of a hypothetical population of an infinite number of throws, with the die in its original condition, exactly one-sixth will be fives.“

So soll also die Vorstellung, daß man es mit einer Gesamtheit von Dingen, Situationen oder Ereignissen zu tun hat, dazu dienen, um Wahrscheinlichkeiten als relative Häufigkeiten definierbar zu machen.[3] Aber der Gedankengang ist nicht nur logisch anfechtbar: denn relative Häufigkeiten können nur in endlichen Gesamtheiten definiert werden. Schließlich noch problematischer ist die implizierte Vorstellung, daß die Gesamtheit schon dann existiert, wenn man sich tatsächlich nur auf eine Stichprobe beziehen kann, die sich auf mehr oder weniger viele *bisher* beobachtete Situationen bezieht. Man denke z. B. an die Typhus-Fälle, die v. Kries als Beispiel verwendet hat (vgl. Abschnitt 5.4). Hat man zum Beispiel n Typhus-Fälle beobachtet und festgestellt, welche von ihnen einen tödlichen Ausgang hatten, müßte man – dem Ansatz Fishers folgend – sich nicht nur vorstellen, daß es alle Typhus-Fälle heute schon gibt, und zwar auch die, die erst in der Zukunft auftreten werden; man müßte weiterhin glauben, daß auch heute schon bestimmt ist, welcher Anteil dieser Typhus-Fälle einen tödlichen Ausgang nehmen wird.

6. Somit kann Fishers Konzeption folgendermaßen charakterisiert werden: Sie beginnt mit der Annahme, daß eine Menge von Daten (welcher Art auch immer) als eine Zufallsstichprobe aus einer hypothetisch unterstellten unendlichen Grundgesamtheit zustande gekommen ist; und die Aufgabe einer probabilistischen Statistik wird darin gesehen, eine Verteilungsfunktion für die hypothetische Grundgesamtheit zu finden, die mit den jeweils verfügbaren Daten vereinbar erscheint.

7. Wie schon bemerkt worden ist, kann man diese Konzeption auch (und weniger obskur) verstehen, wenn man das Reden von hypothetischen Populationen vermeidet und sich stattdessen auf fiktive Zufallsgeneratoren bezieht, die die Sachverhalte, auf die sich die jeweiligen Daten beziehen, hervorgebracht haben könnten. Anklänge an diese Sichtweise finden sich auch bei Fisher, zum Beispiel in der folgenden Bemerkung:

„It should be noted that there is no falsehood in interpreting any set of independent measurements as a random sample from an infinite population; for any such set of numbers are a random sample from the totality of numbers produced by the same matrix of causal conditions: the hypothetical population which we are studying is an aspect of the totality of the effects of these conditions, of whatever nature they may be.“ (Fisher 1922, S. 313)

In dieser Bemerkung wird offenbar eine andere Sichtweise eingenommen. Die Überlegung bezieht sich nicht auf eine fiktive Gesamtheit von Dingen oder Situationen, die es in irgendeinem Sinn „immer schon“ gibt, sondern auf eine „matrix of causal conditions“, die den hypothetischen Kontext

[3] Die Idee, Wahrscheinlichkeiten durch relative Häufigkeiten in indefiniten Gesamtheiten (Klassen) zu definieren, hat bereits Vorläufer im Anschluß an die Kollektivmaßlehre Fechners gefunden; vgl. z. B. Helm (1902).

bestimmt, innerhalb dessen Sachverhalte entstehen. Wie schon in der Diskussion des Ansatzes von Fechner besprochen worden ist, führt jedoch auch bei Fisher die probabilistische Konzeption gerade nicht zu einer ernsthaften Erforschung von Ursachen, d. h. der Prozesse, durch die Sachverhalte tatsächlich entstehen; sondern nur zu einer Deutung, die darin besteht, daß für die Prozesse („of whatever nature they may be") ein Verteilungsgesetz als Fiktion unterstellt und rhetorisch als eine „matrix of causal conditions" interpretiert wird. Die Fortsetzung des gerade angeführten Zitats unterstreicht noch einmal, worum es gehen soll: „The postulate of randomness thus resolves itself into the question, 'Of what population is this a random sample?' which must frequently be asked by every practical statistician." Die wesentliche Aufgabe einer *probabilistischen* (Sozial-) Statistik soll also darin bestehen, Daten durch ausgedachte Verteilungsgesetze zu interpretieren.

6.2.2 Statistisch konzipierte Experimente

1. Obwohl Fisher stets die allgemeine Anwendbarkeit seines Ansatzes für die theoretische Statistik betont hat, so daß die probabilistische *Sozial*statistik bloß als ein Spezialfall erscheint, sollte zum besseren Verständnis darauf hingewiesen werden, daß es ihm in erster Linie um die Entwicklung eines Begriffsrahmens für Experimente ging. Praktisch hatte er es in erster Linie mit landwirtschaftlichen Experimenten zu tun.[4] Daß Fisher zunächst immer an Experimente gedacht hat, kommt gut in der folgenden Bemerkung aus seinem Buch „The Design of Experiments" (zuerst 1935) zum Ausdruck:

> „Statistical procedure and experimental design are only two different aspects of the same whole, and that whole comprises all the logical requirements of the complete process of adding to natural knowledge." (Fisher 1966, S. 3)

Zahlreiche ähnliche Bemerkungen finden sich in Fishers Schriften. Es ist auch dieser Kontext, das Experimentieren, in dem Fisher sich hauptsächlich bemüht hat, den Sinn der fiktiven Unterstellungen seines Ansatzes zu einer probabilistischen Statistik zu begründen. Im Zentrum steht seine Überzeugung, daß statistische Inferenz generalisierbare Einsichten in die Funktionsweise experimenteller Verfahren liefern kann.

2. Aus zwei Gründen ist der enge Zusammenhang zwischen Fishers Ansatz für eine probabilistische Statistik und Experimenten hier zu erwähnen. Erstens, weil sich durch eine Bezugnahme auf Experimente eine durchaus

[4] Von 1919 bis 1933 arbeitete Fisher als Statistiker in der landwirtschaftlichen Versuchsanstalt in Rothamsted (England). Etwa in dieser Zeit hat er auch die Grundgedanken seiner Konzeption einer theoretischen Statistik entwickelt. Vgl. Johnson und Kotz (1997, S. 101ff.).

sinnvolle Analogie zu Zufallsgeneratoren herstellen läßt; zweitens, weil dadurch ein bemerkenswerter Kontrast zur Sozialstatistik entsteht, die es – jedenfalls in ihren primären Betätigungsfeldern – nicht mit experimentell erzeugbaren Prozessen zu tun hat. Verfolgen wir zunächst die Analogie. Drei Gesichtspunkte erscheinen für ein Verständnis von Experimenten wesentlich. Zuerst eine Unterscheidung von passiven Beobachtungen. d'Alembert hat diese Unterscheidung in der zusammen mit Diderot herausgegebenen „Enzyklopädie" (1756/1984, S. 434) so formuliert:

> „Die Beobachtung, die weniger originell und tiefgründig ist, beschränkt sich auf die Tatsachen, die man vor Augen hat, das heißt darauf, Erscheinungen aller Art, die uns das Schauspiel der Natur darbietet, gut zu betrachten und ausführlich zu beschreiben; dagegen sucht das Experiment die Natur tiefer zu erforschen, ihr das zu entreißen, was sie verbirgt, und durch mannigfache Kombination der Körper neue Erscheinungen hervorzubringen, um diese wiederum zu studieren – kurz, es beschränkt sich nicht darauf, die Natur zu belauschen, sondern es befragt sie und zwingt sie zur Auskunft."

Ein zweiter Gesichtspunkt entsteht daraus, daß bei Experimenten *planmäßig* vorgegangen wird. Ein Experiment kann durch eine jeweils bestimmte Vorgehensweise charakterisiert werden oder, wie man auch sagen kann, durch ein *Verfahren*. Damit hängt unmittelbar ein dritter Gesichtspunkt zusammen: Experimente können wiederholt werden, denn der Begriff bezieht sich auf ein Verfahren.

3. Die Analogie zu Zufallsgeneratoren entsteht daraus, daß auch diese als Verfahren definiert sind, durch die Sachverhalte oder Ereignisse hervorgebracht werden können. In beiden Fällen charakterisiert das Verfahren die Vorgehensweise. Durch das Verfahren wird *festgelegt*, wie der Zufallsgenerator beschaffen sein und verwendet werden soll. Ganz analog legt bei einem Experiment das Verfahren fest, wie bei der Durchführung des Experiments vorgegangen werden soll und wie die Bedingungen, unter denen das Experiment auszuführen ist, und ggf. dafür zu verwendende Apparate und Vorkehrungen beschaffen sein sollen.

4. Noch etwas ist wichtig für die Analogie zwischen Experimenten und Zufallsgeneratoren. In beiden Fällen ist ein Akteur erforderlich, der das Experiment durchführt bzw. den Zufallsgenerator betätigt. Bei Experimenten ist dies offensichtlich. Es bedarf eines handelnden Menschen, der das Experiment durchführt. Es ist dieser Mensch, der – durch das Experiment – „die Natur befragt und zur Auskunft zwingt". Ganz entsprechend verhält es sich bei Zufallsgeneratoren. Sie sind durch Verfahren definiert; aber ein Verfahren wird nicht von selbst aktiv. Der Würfel springt nicht von allein vom Tisch, sondern jemand muß ihn nehmen und dadurch den Zufallsgenerator betätigen.[5] Dies hat auch eine wichtige Implikation für die Frage,

[5] Allerdings ist es möglich, Zufallsgeneratoren partiell von menschlichen Akteuren abzulösen. Zum Beispiel kann man sich eine Verknüpfung von Zufallsgeneratoren und

in welcher Weise Zufallsgeneratoren zur begrifflichen Repräsentation von Prozessen verwendet werden können. Sie können verwendet werden, um sich ein Bild davon zu machen, wie Prozesse ablaufen. Aber sie implizieren keine Vorstellungen darüber, wodurch Prozesse zustande kommen. Zum Beispiel bezieht sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung, durch die eine Urne charakterisiert wird, nicht darauf, ob überhaupt Kugeln aus der Urne herausgezogen werden. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung bezieht sich auf ein Verfahren, nicht darauf, ob, wann, wo und von wem mit dem Verfahren Ereignisse erzeugt werden.

5. Diese Bemerkung ist auch deshalb wichtig, weil sie auf einen problematischen Aspekt in einer Formulierung hinweist, die bisher oft verwendet wurde: daß probabilistische Sozialstatistik mit der Annahme beginnt, daß soziale Sachverhalte oder Ereignisse durch Zufallsgeneratoren *zustande kommen*. Die Formulierung trifft zwar in vielen Fällen die Art und Weise, wie Vorstellungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung verwendet werden; z. B. wenn Laplace davon spricht, daß man sich die Geburten von Kindern als Ziehungen aus einer Urne vorstellen könne. Aber es ist klar, daß der Ausdruck 'zustande kommen' in diesem Zusammenhang eine Zweideutigkeit aufweist. Bezieht man sich in der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf einen Zufallsgenerator in der Form einer Urne, geht es tatsächlich nicht darum, ob, wann und von wem eine Kugel aus der Urne herausgezogen wird. Auch wenn man bereit sein sollte, eine Analogie zwischen der Geburt von Kindern und dem Ziehen von Kugeln aus einer Urne als eine Denkmöglichkeit anzuerkennen, kann deshalb mit dieser Vorstellung nicht erklärt werden, ob, wann und von wem ein Kind geboren wird. Der potentielle Sinn der Analogie kann also nur darin liegen, daß sie sich auf *die Art und Weise des Ablaufs* von Prozessen bezieht.

6. Wir werden später besprechen, daß auch dieses Verständnis nicht ausreicht, um Modelle der probabilistischen Sozialstatistik zu verstehen. Es kann aber zunächst verwendet werden, um den Sinn einer Analogie zwischen Experimenten und Zufallsgeneratoren zu verstehen, die erforderlich ist, um Begriffsbildungen und Vorstellungen der Wahrscheinlichkeitstheorie bzw. einer von ihr ausgehenden Statistik zur Charakterisierung von Experimenten zu verwenden. Im Hinblick auf Experimente erscheint die Analogie auch sinnvoll; denn in diesem Fall erfindet der Statistiker keine fiktiven Zufallsgeneratoren, sondern kann sich mit seinen Begriffsbildungen direkt auf Experimente *als Verfahren*, die tatsächlich durchgeführt werden können, beziehen. Natürlich müssen Hypothesen aufgestellt werden. Aber sie beziehen sich in diesem Fall darauf, wie ein Verfahren funktioniert, das empirisch exemplifiziert werden kann. Anders verhält es sich jedoch in der

Uhren in der Weise vorstellen, daß zu bestimmten Uhrzeiten ein Automatismus einsetzt, der einen Zufallsgenerator auslöst. Auf diese Weise werden Uhren und Taktgeber bei der Konstruktion vieler Arten von Maschinen verwendet. Dem entspricht als Verallgemeinerung der Konzeption von Zufallsgeneratoren die Idee stochastischer Prozesse.

probabilistischen Sozialstatistik, deren Zufallsgeneratoren sich nicht auf Experimente – als realisierbare Verfahren –, sondern auf „soziale Prozesse“ beziehen. Denn in diesem Fall handelt es sich um *fiktive* Zufallsgeneratoren. Wie schon in Abschnitt 5.4 besprochen worden ist, kann die Annahme, daß sich die Prozesse, durch die soziale Sachverhalte und Ereignisse entstehen, durch Zufallsgeneratoren konzeptualisieren lassen, nicht als eine Hypothese im üblichen Sinn des Wortes verstanden werden. Insbesondere handelt es sich nicht um eine statistische Hypothese, vielmehr um ein Postulat bzw. um eine Fiktion, die statistische Hypothesen formulierbar machen soll.

6.3 Gesamtheiten in der Sozialstatistik

Fishers Ansatz ist für die Entwicklung der probabilistischen (Sozial-) Statistik sehr einflußreich geworden. Uns interessiert hier hauptsächlich, wie seine Konzeption „hypothetischer Populationen“ mit Vorstellungen über sozialstatistische Gesamtheiten verbunden und vermischt worden ist.

6.3.1 Entwicklung der neuen Rhetorik

1. Daß sich statistische Begriffsbildungen auf Gesamtheiten beziehen, ist natürlich ein Gedanke, der die Entwicklung der Statistik von Anfang an geprägt hat. In der Sozialstatistik war auch mehr oder weniger klar, was gemeint ist: Gesamtheiten von Dingen, Menschen oder Situationen, die in der Erfahrungswelt fixiert werden können. Solche Gesamtheiten sollten mit statistischen Begriffsbildungen *beschrieben* werden. Daraus entwickelte sich das *sozialstatistische* Inferenzproblem: ob man auch anhand von Stichproben statistische Aussagen über Gesamtheiten einschätzbar machen kann und wie man die Stichproben auf zweckmäßige Weise bilden sollte. Zunächst war keineswegs allgemein anerkannt, daß man nach Möglichkeit Zufallsstichproben verwenden sollte, um Gedankengänge der Wahrscheinlichkeitstheorie anwendbar zu machen. Diese Frage wurde erst seit etwa Anfang der 1920er Jahre intensiv diskutiert.[6] Schließlich setzte sich jedoch in den 30er und 40er Jahren die Auffassung durch, daß

[6] Die Diskussion wurde durch Beiträge von A. N. Kiär in Gang gesetzt; ein deutschsprachiger Beitrag erschien 1898 im „Allgemeinen Statistischen Archiv“. Weiterhin bemerkenswert ist eine Arbeit von E. Altschul (1913), in der die Diskussion in die Frage eingebettet wird, was die Sozialstatistik von der Biometrie lernen könne. Die Diskussion entwickelte sich indessen nur langsam. Erst 1924 beauftragte das *International Statistical Institute* eine Kommission, um die „repräsentative Methode“ zu untersuchen. Der Kommission gehörten an: A.L. Bowley, C. Gini, A. Jensen, M.L. March, V. Stuart und F. Zizek. Der Bericht wurde von Jensen (1926) abgegeben. Zur Entwicklungsgeschichte der „repräsentativen Methode“ im Zeitraum von 1895 bis 1939 vgl. Kruskal und Mosteller (1980).

nur Zufallsstichproben für wahrscheinlichkeitstheoretisch begründbare Inferenzverfahren verwendet werden können.

2. Eine wichtige Rolle in dieser Diskussion spielte Jerzy Neyman (1894 – 1981), insbesondere seine Abhandlung „On the Two Different Aspects of the Representative Method: The Method of Stratified Sampling and the Method of Purposive Selection“ (1934). Bemerkenswert ist, daß sich Neyman in dieser Abhandlung auf Fishers Konzeption einer theoretischen Statistik beruft, bei der es, wie wir gesehen haben, gar nicht um sozialstatistische Gesamtheiten und ein sozialstatistisch konzipiertes Inferenzproblem geht, sondern um eine Unterstellung fiktiver Zufallsgeneratoren für Prozesse (insbesondere Experimente), durch die beobachtbare Sachverhalte und Ereignisse zustande gekommen sein könnten. Bemerkenswert ist auch eine etwas spätere Arbeit Neymans, „Outline of a Theory of Statistical Estimation Based on the Classical Theory of Probability“ (1937), in der die Unterscheidung zwischen sozialstatistischen Stichproben und wiederholbaren Experimenten explizit irrelevant gemacht wird. Die Unterscheidung wird zunächst aufgegriffen:

„We shall distinguish two aspects of the problems of estimation: (i) the practical and (ii) the theoretical. The practical aspect may be described as follows:

(i*a*) The statistician is concerned with a population, π, which for some reason or other cannot be studied exhaustively. It is only possible to draw a sample from this population which may be studied in detail and used to form an opinion as to the values of certain constants describing the properties of the population π. For example, it may be desired to calculate approximately the mean of a certain character possessed by the individuals forming the population π, etc.

(i*b*) Alternatively, the statistician may be concerned with certain experiments which, if repeated under apparently identical conditions, yield varying results. Such experiments are called random experiments. To explain or describe the machinery of the varying results of random experiments certain mathematical schemes are drawn up involving one or more parameters, the values of which are not fixed. The statistician is then asked to provide numerical values of these parameters, to be calculated from experimental data and upon the assumption that the mathematical model of the experiments is correct. [...]

In both cases described, the problem with which the statistician is faced is the problem of estimation. This problem consists in determining what arithmetical operations should be performed on the observational data in order to obtain a result, to be called an estimate, which presumably does not differ very much from the true value of the numerical character, either of the population π, as in (i*a*), or of the random experiments, as in (i*b*).“ (Neyman 1937, S. 333f.)

Neyman versucht dann zu zeigen, daß es aus der Sicht eines Statistikers keinen Grund gibt, die beiden Fragestellungen zu unterscheiden:

„Sampling randomly from the population π, it is possible to obtain samples, say

$$E_1, E_2, \ldots, E_N$$

where each sample is described by means of values of the characters $X, Y, \ldots, Z$, corresponding to each of the individuals forming the sample. The probability of any sample E_i, say $\mathrm{P}(E_i \mid \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_l)$, depends on a certain number, l, of parameters θ_i, the values of which are unknown, describing the properties of the population π. The problem consists in determining how to use the sample which may be actually obtained in order to estimate θ_1.

We see that the conditions of the problem in (i*a*) are expressed in terms of probability. The same holds good with regard to the problem in (i*b*), which shows that the distinction between (i*a*) and (i*b*) is only superficial.“ (S. 335)

Diese Ausführungen zeigen, in welcher Weise Neyman versucht, die Unterscheidung zwischen sozialstatistischen Gesamtheiten, die als in der Erfahrungswelt gegebene Sachverhalte verstanden werden können, und Experimenten, bei denen es sich um *Verfahren* zur Erzeugung von Sachverhalten und Ereignissen handelt und zu deren Charakterisierung mithin auf die Konzeption eines Verfahrens Bezug genommen werden muß, als *aus statistischer Sicht* überflüssig aufzuzeigen.

3. Somit konnte die Vorstellung entstehen, daß sich alle Fragen statistischer Inferenz gleichermaßen der Idee bedienen können, daß man es mit Zufallsstichproben aus (irgendwie) *gegebenen* Populationen zu tun hat. Schon in einer früheren Gemeinschaftsarbeit von Neyman und E. S. Pearson (1928) wurde diese Vorstellung so formuliert:

“One of the most common as well as most important problems which arise in the interpretation of statistical results, is that of deciding whether or not a particular sample may be judged as likely to have been randomly drawn from a certain population, whose form may be either completely or only partially specified.” (Neyman und Pearson 1928, S. 175)

Diese Problemformulierung ist weitgehend identisch mit dem in Abschnitt 6.2 behandelten Ansatz von Fisher; jetzt ist jedoch ein Gedanke hinzugekommen, der bei Fisher nur latent vorhanden ist: daß zwischen der Durchführung von Experimenten und der Auswahl von Stichproben aus gegebenen Gesamtheiten keine für die Statistik relevante konzeptionelle Unterscheidung erforderlich sei.[7]

4. Bemerkenswert ist, wie rasch sich diese Vorstellung verbreitet hat. Während in der älteren Literatur Begriffsbildungen der Wahrscheinlichkeitstheorie stets mehr oder weniger explizit durch Vorstellungen über Zufallsgeneratoren (oder durch Rückgriff auf Vorstellungen aus der Theorie der Beobachtungsfehler) motiviert und begründet wurden,[8] haben sich die

[7] Erst seit etwa 1950 hat sich dagegen eine eigenständige Stichprobentheorie für endliche Gesamtheiten entwickelt. Eine kurze Zusammenfassung der wichtigsten Entwicklungsetappen findet sich bei T. M. F. Smith (1976).

[8] Als Beispiele seien genannt Czuber (1908; 1921), Coolidge (1927), Fry (1928), Uspensky (1937).

Lehrbücher ab den 30er Jahren zunehmend an der Vorstellung orientiert, daß man Daten als Zufallsstichproben aus irgendwie gegebenen Populationen auffassen könne. Eines der ersten deutschsprachigen Lehrbücher dieser Art ist die „Einführung in die mathematische Statistik" von O. Anderson (1935), auf die weiter unten etwas genauer eingegangen wird.[9] Bemerkenswert ist auch ein Lehrbuch von T. C. Fry (1928), das zwar noch keinen systematischen Gebrauch von der Populationsrhetorik macht, diese aber an einer Stelle bereits einführt und kommentiert:

„When an 'experiment' is performed we really sort out one of a group of possibilities. Thus, when a penny turns up 'heads' we sort out one of *two* possibilities; or when we measure the resistance of an electrical device we sort out one of an infinity of possibilities. [...] Thinking along these lines leads us quite naturally to the conception of a vast storehouse of possibilities from which, by our experiment, we have drawn one blindly. This hypothetical storehouse we may call the 'universe' (or 'population') from which our 'sample' was drawn. Naturally, we must imagine it to contain all possible results in proportions equal to their respective probabilities, which will ordinarily require us to think of an infinity of items in the storehouse (or, 'individuals' in the 'population'). [...]

These words 'universe' or 'population', 'individual', and 'sample' are in constant use in statistical literature, and they are really quite valuable, for they enable us to talk quite abstractly about events of such diverse sorts that no sufficiently general word could otherwise be found for them. We have introduced them as relating to a hypothetical storehouse the properties of which are determined by the probabilities, known or unknown, which govern our experiment. It is only fair to say that they did not so originate. They are the product of a statistical school which, if it does not actually deny that a probability exists before an experiment is performed, at least regards the experiment as the only feasible means of arriving at it. If I interpret them correctly, the adherents of this school attribute to a 'population' a degree of logical reality which transcends that of abstract 'probability'. To them, the 'population' or 'universe' is the actuality, while 'probability' is relegated to a shorthand form of statement for 'the relative frequency of like individuals in the population'.

Though I appreciate the practical usefulness of the 'universe' concept in aiding imagination, I do not see that the logic of a subject is in any way bettered by substituting for an abstraction (probability) that sort of quasi-concreteness which dreams possess: that is, the mental image of a 'universe' which would be concrete enough if it existed, but which never does, and frequently could not, exist." (Fry 1928, S. 266ff.)

5. Wie rasch sich die Vorstellung verbreitet hat, daß es auch Sozialwissenschaftler stets mit einer stichprobentheoretisch zu reflektierenden Fragestellung zu tun haben, zeigt exemplarisch folgende Bemerkung von Gösta Carlsson aus dem Jahr 1951:

[9] Als Beispiele sei weiterhin verwiesen auf Elderton (1938), Mills (1938), Hagood (1941), Hagood und Price (1952), Quenouille (1950).

„In the social sciences we usually deal with samples instead of complete populations. There is a body of knowledge relating to the errors engendered by this procedure, but there will be no need to discuss the technical aspects of the statistical theory of sampling here. Suffice it to say that expected sampling errors can be computed by methods derived from the mathematical theory of probability. That this should be done, and that a sampling error should be attached to every statistic descriptive of a sample, are principles firmly embedded in the mind of every research worker with a decent methodological upbringing." (S. 139)

Die Bemerkung trifft allerdings für die Entwicklung der Sozialstatistik in Deutschland nicht zu.[10] In Deutschland ist nicht nur Fishers Konzeption einer theoretischen Statistik zunächst weitgehend ohne Einfluß geblieben; dasselbe gilt für die insbesondere von Neyman und E. S. Pearson verbreitete Idee, daß sozialstatistische Stichproben und experimentell gewonnene Daten durch eine einheitlich konzipierte Theorie statistischer Inferenz behandelt werden können. Die Entwicklung der *Sozial*statistik blieb bis in die 1950er Jahre überwiegend von einer deskriptiven Haltung geprägt, wie sie um die Jahrhundertwende vornehmlich von G. v. Mayr kanonisiert worden war (vgl. Abschnitt 1.1). Eine *probabilistische* Sozialstatistik, wie sie von Autoren wie Lexis, v. Bortkiewicz, Fechner u. a. angestrebt wurde – also eine Konzeption, bei der Begriffsbildungen der Wahrscheinlichkeitstheorie dienen sollen, um sich auf Prozesse zu beziehen, durch die soziale Sachverhalte und Ereignisse entstehen –, war während dieses Zeitraums eher eine Randerscheinung. Ein Grund dafür war die in der deutschen Sozialstatistik lange Zeit verbreitete Abneigung gegen eine Verwendung mathematischer Hilfsmittel, die über ein bloßes Zählen und eine Berechnung von Häufigkeiten und Mittelwerten hinausgehen.

6. Eines der ersten deutschsprachigen Lehrbücher, das Fishers Konzeption hypothetischer Populationen zwar nicht systematisch folgt, jedoch seine Rhetorik aufgreift, ist der „Grundriß der theoretischen Statistik" von W. Winkler (1931). Dort heißt es:

„Bekanntlich faßt die moderne Statistik jede statistische Masse, möge sie auch in größter Vollständigkeit erfaßt worden sein, als eine Musterprobe ('sample') aus einer unendlich großen Masse gleicher Wesensbeschaffenheit ('Wesensform') auf, eine Probe, die je nach ihrer absoluten Größe mehr oder weniger dem Einflusse der 'Zufallsstreuung' unterliegt, also eine von der Grundform abweichende Gestalt annimmt." (Winkler 1931, S. 156)

[10] Auch in der amerikanischen Soziologie vollzog sich diese Entwicklung im wesentlichen erst in den 1940er Jahren. Noch 1934 bemerkte F. A. Ross (S. 473f.): „It is amazing how few sociologists using statistical methods seem to be aware of the possibility, to say nothing of the desirability or necessity, of applying these measures [Maßzahlen für „Stichprobenfehler"] to the results of their statistical researches. [...] No sociologist should apply statistics to his problem until he has mastered the fundamentals of the theory of sampling, until he understands the nature of standard errors of the statistical measures which he intends to use, and is fully equipped to apply the tests that they afford." Zur historischen Entwicklung in den USA vgl. auch Bernert (1983). Zu parallelen Entwicklungen in der Ökonometrie vgl. man Morgan (1990).

Wichtig geworden sind vor allem Arbeiten von O. Anderson, insbesondere seine „Einführung in die mathematische Statistik“ (1935), in der Anderson versucht, ein *allgemeines* Konzept statistischer Gesamtheiten zu entwickeln. Der Gedankengang wird folgendermaßen motiviert:

„Wir haben bereits in der Einleitung festgestellt, daß die Grundform, in welcher man gewöhnlich die Resultate der Auszählung homograder Gesamtheiten [qualitative statistische Variablen] darstellt, die *relative Häufigkeit* (bzw. das 100fache oder 1000fache von ihr) der verschiedenen Merkmale und Merkmalsgruppen in ihr ist. So berechnen wir z. B. die relative Häufigkeit der Personen, die im arbeitsfähigen Alter stehen (ein Merkmal), der arbeitsfähigen Männer (Kombination zweier Merkmale), der arbeitsfähigen deutschen Männer (Kombination dreier Merkmale) usw. Unser letztes Ziel besteht hierbei entweder darin, nur die Gliederung eben der gegebenen konkreten Gesamtheit zu erfassen, oder aber (und dies dürfte der häufigere Fall sein), auf Grund der relativen Häufigkeiten, die eine gewisse Gesamtheit aufweist, zu den uns unmittelbar nicht gegebenen und daher gewöhnlich ganz unbekannten relativen Häufigkeiten in einer verwandten Gesamtheit *höherer Ordnung* vorzudringen. Gegeben sei z. B. die relative Häufigkeit der Knabengeburten unter allen Geburten, die eine Gruppe ‘nordischer’ Ehepaare im Laufe eines Jahres aufzuweisen hat. Gefragt wird nach der relativen Häufigkeit aller ‘nordischen’ Knabengeburten desselben Jahres (Gesamtheit höherer Ordnung) oder solcher Geburten in einer längeren Reihe von Jahren (Gesamtheit nächsthöherer Ordnung).“ (Anderson 1935, S. 28f.)

Die Idee besteht also darin, daß man sich zu jeder Menge von Daten eine oder mehrere „Gesamtheiten höherer Ordnung“ bilden kann. Dabei kann es sich, wie Anderson (S. 30) hinzufügt, um Gesamtheiten handeln, die „ein objektives Dasein führen, durch bloße Willkür des Forschers gebildet werden, oder sogar rein gedankliche Konstruktionen darstellen.“

7. Ganz ähnlich wie Fisher verwendet auch Anderson diesen Gedanken, um zu erläutern, wie er von ‘Wahrscheinlichkeit’ sprechen möchte:

„An die Stelle des ungeschickten Ausdrucks ‘relative Häufigkeit eines Merkmals in einer Gesamtheit höherer Ordnung als die gegebene’ setzen wir nun den Ausdruck: ‘statistische Wahrscheinlichkeit des Merkmals’. Wir werden uns im Laufe der weiteren Ausführungen davon überzeugen können, daß diese Definition bereits ausreichend ist, um alle *formal mathematischen Theoreme* der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf ihr aufzubauen. Wir schreiben ‘formal mathematische’, um anzudeuten, daß es von diesen Theoremen einen unmittelbaren Übergang zur konkreten Tatsachenwelt noch nicht gibt, denn nach unserem Dafürhalten kann das sogenannte ‘Gesetz der großen Zahlen’ allein mit Hilfe mathematischer ‘tautologischer Umformungen’ *nicht* bewiesen werden. Um diesen Übergang zur Tatsachenwelt zu schaffen, müssen gewisse zusätzliche Annahmen eingeführt werden, die nicht mathematischer, sondern empirischer Natur sind und darin bestehen können, daß man sich die betreffende Gesamtheit höherer Ordnung als ein *‘statistisches Kollektiv’* denkt. Unter einem ‘statistischen Kollektiv’ verstehe ich – in gewisser Anlehnung an Mises – eine solche *‘gut durchmischte’* Gesamtheit, aus welcher die gegebene Gesamtheit auf dem Wege einer ‘blinden Auswahl’ etwa nach dem Muster von Kugelziehungen aus einer geschlossenen Urne entstanden sein könnte. Unsere ‘statistischen Kollektive’ bilden also nur einen Sonderfall unter den statistischen Gesamtheiten, und sie können, wie diese, ein objektives Dasein führen, durch bloße Willkür des Forschers gebildet werden, oder sogar rein gedankliche Konstruktionen darstellen; ferner können sie, ebenfalls wie die Gesamtheiten überhaupt, entweder Bestandsmassen sein, die zu einem gewissen Zeitpunkte wirklich in ihrem ganzen Umfange existieren, oder aber Ereignismassen, deren Elemente nur allmählich im Laufe der Beobachtung entstehen und nicht alle gleichzeitig in Erscheinung treten.“ (Anderson 1935, S. 29f.)

Hier setzt eine *probabilistische* Sozialstatistik also mit dem Gedanken ein, daß die jeweils verfügbaren Daten sich auf zufällig zustande gekommene Teilmengen aus Gesamtheiten höherer Ordnung beziehen. Und wie bei Fisher soll sich das Wort ‘Wahrscheinlichkeit’ auf relative Häufigkeiten in den höheren Gesamtheiten beziehen.[11]

8. Allerdings versucht Anderson, Fishers Ansatz allgemeiner zu fassen. Wie wir gesehen haben, betrachtet Fisher die jeweils gegebenen Daten stets als eine Zufallsstichprobe aus einer hypothetisch unterstellten unendlichen Grundgesamtheit. Anderson betont demgegenüber, daß dies zwar zulässig, jedoch nicht immer sinnvoll sei. Anderson (1935, S. 85f.) stellt zunächst den Standpunkt Fishers dar und fährt dann folgendermaßen fort:

„Somit führt Fisher jede tatsächlich gegebene Gesamtheit [Stichprobe] sofort auf eine höhere Gesamtheit von *unendlichem* Umfange zurück und hat hierbei nur den ‘Fall mit Zurücklegen’ im Auge. Sein Standpunkt wird in vielen Fällen zu denselben praktischen Konsequenzen führen wie der unsere, doch gibt es auch solche, wo beide stark differieren können. Stellen wir uns z. B. ein Spiel Karten vor, aus dem eine gewisse Anzahl Karten ohne Zurücklegen entnommen wird. *Unsere* Gesamtheit höherer Ordnung ist eben das ganze Spiel Karten, während man sich nach Fisher hier ebenfalls eine unendliche Population von Karten vorstellen müßte. Oder ein anderes Beispiel, welches für den Statistiker größeres praktisches Interesse besitzt: gegeben sei die Bevölkerung eines gewissen Landes; täglich sterben aus ihr gewisse Personen weg und andere werden hinzugeboren. Es ist sehr wohl möglich, daß hierdurch auch einige durchschnittliche Charakteristiken der

[11] In einer späteren Arbeit hat Anderson auch vorgeschlagen, daß man sich die höheren Gesamtheiten stets anhand eines Urnenschemas vorstellen könne: „Man darf ferner nicht vergessen, dass der Statistiker, wenigstens der Sozialstatistiker, nur bei der Erhebung in unmittelbare Berührung mit dem zu beobachtenden Objekt kommt, und dabei spielt die Wahrscheinlichkeitstheorie keine Rolle. Bei der weiteren Aufarbeitung und wissenschaftlichen Auswertung des gesammelten Materials, wobei eben die Wahrscheinlichkeitstheorie gebraucht wird, hat der Statistiker es schon allein mit dem *Zählpapier* und dessen Inhalt bzw. mit der *Zählkarte* zu tun. Eben deshalb liegt es auch besonders nahe und ist, soviel ich urteilen kann, mit keinem Verlust an Allgemeingültigkeit der theoretischen Ergebnisse verbunden, wenn man in der wahrscheinlichkeitstheoretisch orientierten, d. h. ‘stochastischen’ Theorie der Statistik wenigstens im Bereiche der sozialen Massenerscheinungen *immer von einem Urnenschema* ausgeht. Man hat sich eben eine Urne mit Zählkarten als Vertreterin der Gesamtheit höherer Ordnung zu denken, aus der eine Anzahl von Karten so oder anders ‘gezogen’ wird oder ‘selbst herausfällt’. Diese bilden dann die Gesamtheit niederer Ordnung, die ‘Stichprobe’.“ (Anderson 1947, S. 493)

Bevölkerung, wie z. B. das Geschlechtsverhältnis, die Geburten- und Sterblichkeitsziffer usw. Veränderungen erleiden. Bei einer jeden solchen Veränderung müssen wir uns, nach Fisher, eine *andere* unendliche Population vorstellen, aus der die gegebene auf dem Wege einer zufälligen Auswahl entstanden sein könnte [...]. Im Interesse der größeren Allgemeingültigkeit der theoretischen Konstruktionen und insbesondere im Interesse der Theorie der Stichprobenerhebungen müssen wir darauf bestehen, daß auch der Fall von *endlichen* Gesamtheiten höherer Ordnungen in der statistischen Methodenlehre genügend berücksichtigt wird.“ (Anderson 1935, S. 86)

Auf den ersten Blick erscheint Andersons Idee, den Ansatz von Fisher nur als einen Spezialfall einer allgemeinen Theorie höherer Gesamtheiten, die je nach Anwendungsfall unterschiedlich konzipiert werden können, zu betrachten, durchaus sinnvoll. Eine genauere Überlegung zeigt jedoch, daß die wichtige Unterscheidung zwischen Auswahlverfahren (für die Stichprobentheorie) und fiktiven Zufallsgeneratoren (für Modelle, die sich auf Prozesse beziehen) dadurch eher noch unklarer gemacht wird. Denn folgt man dem Andersonschen Gedankengang, erscheint es schließlich so (wie schon oben am Beispiel Neymans dargestellt), als ob es sich in beiden Fällen nur um Spezialfälle einer allgemein konzipierbaren Vorstellung handelt: daß man in beiden Fällen die jeweils verfügbaren Daten *als eine Auswahl* aus einer real existierenden oder so denkbaren Gesamtheit höherer Ordnung auffassen könne. Damit wird jedoch der irreführende Gedanke, daß man sich auch Zufallsgeneratoren, die sich ihrer Intention nach auf Entstehungsprozesse sozialer Sachverhalte oder Ereignisse beziehen, als ein Auswahlverfahren aus einer schon existierenden Gesamtheit vorstellen könne, nicht vermieden, sondern verfestigt. Es ist natürlich richtig, daß sich diese Kritik zunächst gegen Fishers Konzeption hypothetischer unendlicher Populationen richten muß. Aber die Kritik sollte nicht so geführt werden, daß Fishers Ansatz nur als ein Spezialfall einer allgemeinen Stichprobentheorie erscheint. Vielmehr sollte gezeigt werden, daß Fisher nur eine obskure Rhetorik verwendet, die fälschlicherweise das Bild einer Zufallsauswahl aus einer Population suggeriert. Löst man sich von dieser irreführenden Rhetorik, zielt Fishers Ansatz nicht auf eine Stichprobentheorie, sondern macht einen Vorschlag, wie man fiktive – oder, für Fisher primär, durch Experimente definierbare – Zufallsgeneratoren zur Konstruktion statistischer Modelle verwenden kann.

9. Die in Deutschland und Österreich durch W. Winkler und O. Anderson begonnene Verwendung des Schemas „Stichprobe – Grundgesamtheit“ als Basiskonzeption für eine probabilistische Sozialstatistik fand zunächst keine systematische Fortsetzung.[12] Das erste deutschsprachige Lehrbuch,

[12] Über die Entwicklung der Statistik in der Zeit des NS-Regimes erhält man einige Hinweise aus dem von Friedrich Burgdörfer herausgegebene zweibändige Sammelwerk „Die Statistik in Deutschland nach dem heutigen Stand“ (1940), das zum 70. Geburtstag von Friedrich Zahn, dem Nachfolger von G. v. Mayr in der Herausgabe des „Allgemeinen

das die inzwischen hauptsächlich in England und den USA entwickelten Überlegungen zur theoretischen Statistik systematisch verarbeitet, ist die „Einführung in die mathematische Statistik“ von Leopold Schmetterer (1956, 2. Auflage 1966).[13] In der Einleitung knüpft Schmetterer zunächst an ein traditionelles Statistikverständnis an:

„Man kann somit als ein Charakteristikum der Statistik das Studium der Massenerscheinungen betrachten. Es ist eine Erfahrungstatsache, daß bei Massenerscheinungen Gesetzmäßigkeiten nachgewiesen werden können, die bei Einzelerscheinungen kein Gegenstück haben. Das Studium dieser empirischen Gesetze, die man bei Massenerscheinungen beobachten kann, ist die Aufgabe der formalen Statistik.[14] Als Aufgabe der mathematischen Statistik, die uns hier ausschließlich beschäftigen wird, könnte man die Aufstellung eines Kalküls bezeichnen, dessen Sätze bei geeigneter Interpretation in Übereinstimmung mit den Feststellungen der formalen Statistik stehen.

Ein Beispiel möge zeigen, wie die empirischen Gesetze der Statistik in roher Fassung zu fast selbstverständlichen Denkgewohnheiten geworden sind. Die Tatsache, daß das Geschlechtsverhältnis bei Neugeborenen immer ungefähr 1 : 1 beträgt, ist für alle Gebiete des menschlichen Lebens von größter Bedeutung, und eine ernste Störung dieses Zustandes hätte für unser Dasein gewichtige Folgen. Es wird aber niemandem einfallen, sich diesbezüglich Befürchtungen hinzugeben, nur, weil er vielleicht soeben eine Familie kennengelernt hat, wo sämtliche (z. B.

Statistischen Archivs“, erschien. Bereits 1946 erschien jedoch in Basel eine Arbeit von L. V. Furlan, in der gleich zu Beginn (S. 9) folgendes bemerkt wird: „Mit der soeben gewonnenen Erkenntnis, daß eine beliebig gegebene Gesamtheit statistischer Zahlen nur eine Stichprobe einer größeren, aus unendlich vielen Elementen bestehenden Gesamtheit ist, welche alle denkbaren statistischen Zahlen umfaßt und daher das soziale Phänomen in seiner ganzen Ausdehnung in quantitativer Hinsicht festhält, bewegen wir uns auf einem Boden, der den neueren Anschauungen der statistischen Wissenschaft durchaus konform ist. Während man nämlich noch vor wenigen Jahrzehnten mit Gesamtheiten, die aus unendlich vielen Einzelelementen bestehen, in der Statistik nicht viel hätte anfangen können, ist es heute umgekehrt so, daß wir uns daran gewöhnen, in jeder endlichen Gesamtheit nur eine Stichprobe einer aus unendlich vielen Gliedern zusammengesetzten Gesamtheit zu sehen.“

[13] Im Vorwort zur ersten Auflage heißt es: „Die mathematische Statistik hat in den letzten 25 Jahren in Verbindung mit der modernen Wahrscheinlichkeitsrechnung einen enormen Aufschwung genommen, der allerdings fast ausschließlich von Gelehrten außerhalb des deutschsprachigen Raumes getragen wurde. Die Ungunst der Zeit brachte es mit sich, daß die deutschsprachigen Länder von dieser Entwicklung ziemlich unberührt blieben. Die Folge davon ist, daß es wohl eine große Anzahl fremdsprachiger und vielfach ausgezeichneter Werke über den Gegenstand der mathematischen Statistik gibt, jedoch kein einziges modernes Lehrbuch in deutscher Sprache, wenn man von der Monographie von A. Linder absieht, welche sich vor allen Dingen an den statistisch arbeitenden Naturwissenschaftler und nur in geringem Ausmaße an den Mathematiker wendet.“ Über den Inhalt seines Buches sagt Schmetterer an der gleichen Stelle: „Die Darstellung umfaßt hauptsächlich jenen Bestand der mathematischen Statistik, den man heute bereits als klassisch bezeichnen könnte und der mit den Namen *Fisher*, *Pearson* und insbesondere *Neyman* verknüpft ist.“

[14] [Schmetterer verweist an dieser Stelle auf die zweite Auflage von Winklers „Grundriß der Statistik“ (1931), die 1947 erschienen ist.]

5) Kinder Knaben sind. Man weiß eben aus Erfahrung, daß bei Betrachtung nur eines Falles auch große Abweichungen von den Verhältnissen, wie sie in der Masse herrschen, vorkommen können, ohne daß dies im einzelnen begründet werden kann. Man spricht in diesem Zusammenhang von zufälligen Abweichungen von den Verhältnissen in der Gesamtheit und meint damit, daß keine Veranlassung bestehe, anzunehmen, daß diese Abweichungen von einer bestimmten gemeinsamen Ursache hervorgerufen sind. So hat man etwa keine zufälligen Abweichungen vor sich, wenn man auf der Straße das Geschlechtsverhältnis der Passanten beobachtet und feststellt, daß es in der Nähe einer Knabenschule vor 8 Uhr morgens stark gestört ist. Die Ausschaltung solcher systematischer Abweichungen sowie die Beurteilung von Abweichungen als zufällig oder systematisch gehören zu den wichtigsten Aufgaben des Statistikers.“ (Schmetterer 1966, S. 21)

Das Beispiel deutet an, daß sich Schmetterer gedanklich auf Prozesse beziehen möchte, durch die Sachverhalte und Ereignisse entstehen. Solche Prozesse werden als „zufällig“ bezeichnet, wenn und insoweit man nicht weiß, wie sie zustande kommen und ablaufen. Also könnte man vermuten, daß sich Schmetterer in der Begründung seiner Begriffsbildungen auf solche Prozesse bezieht. Das ist jedoch nicht der Fall. Nachdem im ersten Kapitel die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung im wesentlichen rein formal (axiomatisch) eingeführt werden, wobei zur Motivation die Idee eines „Zufallsexperiments“ verwendet wird, beginnt das zweite Kapitel mit einer Einführung in die „elementare Stichprobentheorie“:

„Anläßlich der Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes haben wir folgende Situation beschrieben: Es liege eine Gesamtheit von Beobachtungen vor, die sich auf gewisse Merkmale beziehen. Diese Gesamtheit wird als unendlich angesehen, und zwar in dem Sinn, daß nach einer gleichbleibenden Vorschrift die Beobachtungen stets reproduzierbar sind, also z. B. eine unendlich ausgedehnte Serie von Würfelversuchen. Aus dieser Gesamtheit wählt man ‘zufällig’ eine Reihe von Beobachtungen aus. Ist deren Anzahl hinlänglich groß, dann weichen die relativen Häufigkeiten von Ereignissen, die sich auf die unter Beobachtung stehenden Merkmale beziehen, im allgemeinen nur unbedeutend von einem stets konstanten Wert ab, den wir als empirische Wahrscheinlichkeit bezeichnet haben.[15] Es ist nicht leicht, empirische Kriterien dafür anzugeben, wann eine Auswahl aus einer Gesamtheit als zufällig angesehen werden kann. Oft begnügt man sich mit der etwas vagen Formulierung, daß eine Zufallsauswahl realisiert ist, wenn kein Grund vorliegt, der eine bevorzugte Auswahl irgendeiner Beobachtung erkennen ließe. Man zieht in diesem Zusammenhang vielfach das ‘Urnenschema’ heran. Die Urne oder – besser gesagt – deren Inhalt (z. B. gleichgestaltete Kugeln) repräsentiert die Gesamtheit, und nun werden dieser Urne Kugeln entnommen, wobei stets auf ‘gute Durchmischung’ des Inhalts zu achten ist. Die gezogenen Kugeln sieht man als Zufallsauswahl aus der Urne an. [...] Ziel solcher zufälliger Auswahlen aus der Gesamtheit ist es, über die Struktur der Gesamtheit etwas

[15] [Schmetterer (S. 23) folgt einer Variante der frequentistischen Deutung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs, die sich Wahrscheinlichkeiten als fiktive Grenzwerte für relative Häufigkeiten bei der wiederholten Anwendung eines Zufallsgenerators vorstellt. Damit beschäftigen wir uns in Kapitel 8.]

auszusagen, insbesondere über die Größe der mit ihr verknüpften empirischen Wahrscheinlichkeiten. Man läßt sich hierbei etwa von der Vorstellung leiten, daß man die empirische Wahrscheinlichkeit ‘genau bestimmen könnte’, wenn man unendlich viele Versuche macht. [...]

Es hat sich folgende Terminologie eingebürgert: Die (hypothetische) unendliche Gesamtheit der möglichen Beobachtungen nennt man die *Grundgesamtheit* und die aus dieser Menge (zufällig) herausgegriffenen Beobachtungsergebnisse eine *Stichprobe* aus dieser Grundgesamtheit. Die Anzahl der in der Stichprobe enthaltenen Beobachtungen bezeichnet man als deren *Umfang*. Die Vorstellung einer unendlichen Grundgesamtheit stellt eine Idealisierung der tatsächlichen Verhältnisse dar, auch wenn man nur an eine ‘potentiell unendliche’ Gesamtheit im Sinn der unbegrenzten Reproduzierbarkeit der Zufallsversuche denkt. Der Praktiker sieht jede Gesamtheit, die im Verhältnis zum Umfang der entnommenen Stichprobe ‘sehr groß’ ist, als unendlich an.“ (Schmetterer 1966, S. 147f.)

Mit geringfügigen Varianten findet man eine Darstellung dieser Art in den meisten Einführungen in die statistische Methodenlehre, die seit den 1950er Jahren veröffentlicht worden sind. Offenbar wird jede Erinnerung an eine Unterscheidung zwischen einerseits Prozessen, oder auch Experimenten, durch die Sachverhalte und Ereignisse zustande kommen, und andererseits irgendwie *gegebenen* Gesamtheiten, aus denen Stichproben *ausgewählt* werden können, nicht nur vermieden, sondern – wie schon oben am Beispiel von Neyman dargestellt wurde – als für die Begriffsbildungen der statistischen Methodenlehre irrelevant erklärt.

6.3.2 Bemerkungen zu einer Verwechslung

1. Die Vorstellung, daß man auch Zufallsgeneratoren, die sich ihrer Intention nach auf Prozesse beziehen, als Auswahlverfahren auffassen könne, führt nicht nur zu Unklarheiten, sondern gelegentlich auch zu irreführenden Verwechslungen. Auf Unklarheiten, die daraus resultieren, daß hypothetische Populationen indefinite Begriffsbildungen implizieren, wurde schon mehrfach hingewiesen. Um zu illustrieren, wie daraus auch begriffliche Verwechslungen entstehen können, beziehen wir uns auf ein einflußreiches Lehrbuch der Statistik von G. U. Yule und M. G. Kendall (1950):[16]

„By the logical extension of the idea of a population of concrete objects, which we shall call an *existent population*, we are able to construct the idea of a *hypothetical population*. Consider the throws of a die. Each throw will be regarded as an individual. There is an infinite number of throws which can be made with the die, provided that it does not wear out. Let us then define as our population of discussion all the *possible* throws of the die. [...] Such a population is called a *hypothetical* population. We may define it formally as the aggregate of all

[16] Wir zitieren aus der 14. Auflage, die erste Auflage erschien 1911. George U. Yule lebte 1871–1951, Maurice G. Kendall 1907–1983; biographische Angabe finden sich bei Johnson und Kotz (1997, S. 130ff. und 168ff.).

the conceivable ways in which a specified event can happen.“ (Yule und Kendall 1950, S. 367)

Das Problem besteht nicht nur darin, daß es die „Menge aller möglichen Würfe mit einem Würfel“ nicht gibt; so wenig wie die „Menge aller potentiellen Kunden eines Versicherungsunternehmens“ oder die „Menge aller Fußballspiele“, die bereits stattgefunden haben oder in der Zukunft vielleicht noch stattfinden werden. Problematischer ist, daß infolgedessen das Reden über – zum Beispiel – Würfelspiele ganz unklar wird. Natürlich kann man einen Würfel verwenden, um mit ihm „beliebig oft“ bestimmte Ereignisse zu erzeugen. Man kann in diesem Fall auch von einem „aggregate of all the conceivable ways in which a specified event can happen“ reden. Aber *diese* Menge hat genau sechs Elemente, entsprechend den 6 möglichen Ergebnissen eines Würfelwurfs; sie ist weder hypothetisch noch indefinit, und sie sollte natürlich nicht mit der indefiniten „Menge aller Würfe des Würfels“ verwechselt werden.

2. Die Menge der möglichen Ergebnisse bei einem Würfelspiel hat tatsächlich mit der Idee einer statistischen Gesamtheit überhaupt nichts zu tun, sondern fixiert den Merkmalsraum einer statistischen Variablen.[17] Angenommen, man wirft den Würfel 100 Mal und erzeugt dadurch die Situationen $\omega_1, \ldots, \omega_{100}$; dann hat man eine Gesamtheit

$$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_{100}\}$$

und man kann eine statistische Variable

$$X : \Omega \longrightarrow \tilde{\mathcal{X}} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

definieren, die jeder Situation ω_i die in ihr erzielte Augenzahl $X(\omega_i)$ zuordnet. Man hat es dann mit einer definiten Gesamtheit Ω zu tun und außerdem mit einem Merkmalsraum $\tilde{\mathcal{X}}$ für eine statistische Variable X.[18]

3. In diesem Beispiel besteht sowohl die Gesamtheit Ω als auch der Merkmalsraum $\tilde{\mathcal{X}}$ aus einer endlichen Menge von Elementen. Indem man Merkmalsräume in Zahlenmengen einbettet, kann man auch Merkmalsräume konzipieren, die in einem mathematisch explizierbaren Sinn unendlich viele Merkmalswerte enthalten. Demgegenüber sollte jedoch betont werden, daß definite statistische Gesamtheiten stets endlich sind; denn Mengen

[17] Oder einer Zufallsvariablen, die verwendet werden kann, um einen Zufallsgenerator formal zu repräsentieren.

[18] Man kann auch eine andere Rekonstruktion der Überlegung von Yule und Kendall versuchen und an den Begriff der Zufallsvariablen und eines durch sie repräsentierten Zufallsgenerators anknüpfen. Man würde dann eine Zufallsvariable $\dot{X} : \tilde{\mathcal{K}}_1 \times \ldots \times \tilde{\mathcal{K}}_{100} \longrightarrow \tilde{\mathcal{X}}^{100} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^{100}$ konstruieren, für die man auch ein aleatorisches Wahrscheinlickeitsmaß angeben kann. Aber auch in dieser Version bezieht man sich nicht auf eine statistische Gesamtheit, sondern auf die Kennzeichnungsmenge eines Zufallsgenerators (bzw. auf eine Funktion $\dot{X}$ auf der Kennzeichnungsmenge).

von Dingen, Menschen oder Situationen, die in unserer Erfahrungswelt fixiert werden können, haben immer nur eine endliche Anzahl von Mitgliedern. Dagegen sind „unendliche Populationen“ schon begrifflich nicht explizierbar und suggerieren Verwechslungen mit Merkmalsräumen. Zur Illustration kann wieder das Lehrbuch von Yule und Kendall dienen:

„By a *finite population* we shall mean a population which contains a finite number of members. Such, for instance, is the population of inhabitants of Great Britain and the population of books in the British Museum. Similarly, by an *infinite* population we shall mean a population containing an infinite number of members. Such, for instance, is the population of pressures at various points in the atmosphere, or the population of possible sizes of the wheat crop, for, although there are limits to the size, the actual tonnage can take any numerical value within those limits.“ (Yule und Kendall 1950, S. 367)

Spricht man von den möglichen Werten, die das Gewicht einer Weizenernte annehmen kann, bezieht man sich offenbar auf einen Merkmalsraum, nicht auf eine statistische Gesamtheit. Und da die Autoren von ihrer Weizenernte im Singular sprechen, ist auch ganz unklar, wie man in diesem Fall eine statistische Gesamtheit ausfindig machen kann.

6.3.3 Populationen und Variabilität

1. Statistische Methoden werden oft mit dem Hinweis motiviert, daß man mit ihrer Hilfe die Variabilität von Merkmalen untersuchen könne. In gewisser Weise ist das unmittelbar einleuchtend: Die unterschiedlichen Werte einer statistischen Variablen zeigen, wie Merkmalswerte in einer Gesamtheit variieren; und durch die Bildung einer Häufigkeitsverteilung erhält man eine Beschreibung dieser Variabilität. Durch ein Interesse, Einsichten in solche Variabilität zu gewinnen, kann man z. B. Fechners Kollektivmaßlehre verstehen. Ein entsprechendes Interesse läßt sich in vielen Anwendungen statistischer Methoden feststellen. J. Neyman hat dazu folgende allgemeine Bemerkung gemacht:

„With an overwhelming frequency, modern science is concerned with categories of objects which, while satisfying a common definition, vary considerably in those characteristics that are relevant to the study performed. As a result, any attempt at a mathematical treatment must involve assumptions that some given characteristic X of the objects studied is a random variable with some particular, known or unknown, distribution.“ (Neyman 1971, S. 1)

Hier kommt auch zum Ausdruck, daß empirisch feststellbare Variabilität die Begründung liefern soll, daß eine Anwendung von Begriffsbildungen und Vorstellungen der Wahrscheinlichkeitstheorie sinnvoll sein kann. Das war ja auch schon Fechners Gedanke: daß die Elemente einer statistischen Gesamtheit „zufällig variieren“.

2. Dann entsteht jedoch eine Frage: Wodurch kommt die Variabilität zustande? Denn ein Hinweis auf Zufälligkeiten ist für sich genommen nichtssagend. Um in irgendeiner Weise weiterzukommen, muß man sich gedanklich auf Prozesse beziehen, durch die Dinge, Menschen oder Situationen jeweils bestimmte Eigenschaften bekommen. Schon die Fragestellung wird indessen unklar, wenn man sich in der theoretischen Statistik auf unspezifische Weise des Schemas „Stichprobe – Grundgesamtheit“ bedient. Es entsteht der Eindruck, daß das Entstehen von Variabilität grundsätzlich mit der Vorstellung eines Auswahlverfahrens verbunden werden kann. Aber dort, wo dieser Gedanke einen Sinn macht, nämlich bei der Auswahl von Elementen aus einer vorgegebenen Gesamtheit, hat man es gerade nicht mit einem Prozeß zu tun, durch den Dinge, Menschen oder Situationen jeweils bestimmte Eigenschaften bekommen.

3. Zur Illustration der Unklarheiten, die durch die Verbreitung des Redens von Stichproben und Populationen in der statistischen Methodenlehre entstanden sind, sei exemplarisch auf ein Lehrbuch hingewiesen, das die neue Rhetorik übernommen hat: „Introductory Statistics“ von M. H. Quenouille (1950). Das Buch beginnt mit folgenden Bemerkungen:

„*Sampling* – If a series of measurements is made, it is implied that there is a variability in the results which necessitates taking more than one measurement. This variability may be due to the measurements being taken on different objects or under different conditions, as with a set of children's weights, or due to errors or changes in the method of measurement, as might occur in the evaluation of a physical constant such as g, or due to a combination of these, as with plot yields in an agricultural lay-out. If a set of children's weights is taken, this is commonly described as a 'sample' from a particular population, unless every child in the population is measured. This terminology is extended in statistical work so that a set of measurements of the physical constant g is said to be a sample from the population of possible measurements of g, and plot yields are said to be samples from the population of plot yields grown on similar soils under similar conditions. In this wider sense the population does not necessarily exist. For example, it is impossible to measure the yield of a field-plot more than once under the same conditions, since measurements will be affected by the drain on the ressources of the land caused by previous measurements. It is nevertheless useful to think of a plot yield as a sample from the population of possible plot yields.“ (S. 1)

Diese Ausführungen machen gut deutlich, welche Unklarheiten entstehen, wenn man sich das Entstehen von Variabilität stets als Folge von „sampling“ aus einer Population vorstellen möchte.[19] Es ist auch bemerkenswert, wie Quenouille schließlich bei einer Population endet, die es nicht gibt. Aber wie kann man aus einer nicht-existierenden Gesamtheit eine Stichprobe ziehen?[20]

4. Halten wir demgegenüber fest: Die Sozialstatistik hat es zunächst immer nur mit in der Erfahrungswelt fixierbaren definiten Gesamtheiten zu tun. Auf sie bezieht sich die sozialstatistische Datengewinnung, sei es in der Form von Stichproben oder durch Totalerhebungen. Diese Tatsache schließt es natürlich nicht aus, sich gedanklich auf Prozesse zu beziehen, durch die die Mitglieder einer sozialstatistischen Gesamtheit enstanden sind bzw. jeweils bestimmte Eigenschaften bekommen haben. Hier setzt eine probabilistische Sozialstatistik an, indem sie diese Prozesse durch Zufallsgeneratoren reflektierbar zu machen versucht. Fishers Idee hypothetischer unendlicher Populationen kann als eine nur in der Rhetorik unterschiedliche Konzeption dieses Grundgedankens verstanden werden. Die Rhetorik ist aber nicht nur deshalb unglücklich, weil sie unklar ist und Verwechslungen nahelegt. Sie legt auch den irreführenden Gedanken nahe, daß es gewissermaßen zwei Arten von Populationen gibt: einerseits die empirisch bestimmbaren Gesamtheiten der Sozialstatistik und andererseits gedanklich konstruierbare hypothetische Populationen. Infolgedessen scheint eine sehr merkwürdige Fragestellung zu resultieren: Kann man sich die empirischen Gesamtheiten der Sozialstatistik als Teilmengen – oder mehr noch: als Zufallsstichproben – aus hypothetischen Populationen vorstellen?

5. Daß die Frage in eine Sackgasse führt, wird besonders deutlich, wenn man sich überlegt, wie der Idee einer hypothetischen Population in der Sozialstatistik ein Sinn gegeben werden könnte. Zur Illustration beziehen wir uns auf Überlegungen von M. J. Hagood in ihrem Buch „Statistics for Sociologists“ (1941).[21]

---

[19] Dagegen sind folgende Unterscheidungen von A.L. Bowley (1926, S. 248) erheblich klarer: „Variation is a general law of nature and is found in most human affairs, so that large scale observations usually lead to frequency groups. Four classes can be distinguished: (a) where every member of a group has been measured, e.g. the wages of every adult male working in a trade; (b) observations of samples selected from a group, e.g. the number of children in each of 1,000 families chosen in a town where there are 50,000 families, or the measurement of leaves of a tree of a particular kind; (c) repeated measurements of a physical quantity (e.g. of the declination of a star) where the variations are due to instrumental *errors*; (d) the mathematical probabilities of various numbers of successes (e.g. the chances of obtaining $1, 2, 3, \ldots$ heads when 50 coins are tossed) or the frequencies of events whose magnitude depends on an unknown complex of causes.“ Nur im letzten Fall geht es um Prozesse, durch die Variabilität in der Realität entsteht.

[20] Mit dieser Frage – „sampling from hypothetical populations“ – hatten sich auch schon Yule und Kendall (1950, S. 380f.) beschäftigt. Exemplarisch beziehen sie sich auf die „Menge aller möglichen Würfe“, die man mit einem Würfel ausführen könnte. Es ist natürlich klar, wie man eine „Stichprobe“ erzeugen kann: indem man würfelt. „But since our population does not exist for us to examine separately, the only knowledge about it being derived from the sample itself, it will be clear on a little reflection how difficult it is to say that every other possibility in the population had an equal chance of occurring.“

[21] Ein Auszug aus diesem Buch wurde auch in einem Sammelband von Morrison und Henkel (1970) abgedruckt; im wesentlichen gleiche Ausführungen finden sich auch noch in einer zweiten Ausgabe des Buches, vgl. Hagood und Price (1952).

„Let us consider now the situations in sociology requiring the different methods of statistics. [...] If a survey has as its purpose the description of a set of conditions for a certain area at a certain time, usually with the implied purpose of measuring them in order to plan some program of reform to alter them, then descriptive statistics may be adequate for the analysis of such quantitative data as are collected in this type of project.

Practical sampling situations requiring inductive statistics. If, on the other hand, either of the following situations is the case, inductive statistics is indicated. The first situation is the same as that described above for the survey, except that the area is too great for every unit to be counted or measured, and only a sample of units is observed. Here one uses inductive statistics to form estimates of various summarizing measures for the whole area (universe) with accompanying measures of unreliability of the estimates. This function of inductive statistics is simply a substitute for descriptive statistics when all units cannot be surveyed.

Hypothetical sampling situations requiring inductive statistics. The other use of inductive statistics is not so easy to state or explain. In this second situation, from observations made either from a sample or from a complete survey of some limited universe, we generalize to a hypothetical universe which is difficult to define. It is the universe of all possible samples (which may be limited universes) which could have been produced under similar conditions of time, place, culture, and other relevant factors.“ (Hagood 1941, S. 302f.)

Die zweite Hälfte des Gedankengangs, in der an Fishers hypothetische Populationen angeknüpft wird, ist offenbar merkwürdig und schwer verständlich. Die Autorin versucht, der Idee zunächst dadurch einen Sinn zu geben, daß sie sich auf Experimente bezieht. Dann geht es so weiter:

„Sociologists, especially those in the field of social psychology, are developing experimental techniques for attack on certain of their problems where they have the advantage of more or less control over relevant factors. In general, however, this is not the case, and we are concerned here with the situation where the sociologist can only observe at one time measures or attributes of a series of units. We are concerned especially with the case where the observations are made for all of a series of units as of a certain time, as, for instance, on all of the rural counties in the United States for 1930. Let us suppose that for 1930 one observes a negative correlation coefficient of value r between fertility ratio and level of living for all rural counties in the United States. With the same formulas and procedures used by the experimentalists, the sociologist tests the significance of his observed r and finds it ‘significantly’ different from zero. What does this test mean to the sociologist? In any test of significance there is a testing of some hypothesis about a universe from which the set of observations (a limited universe itself in this case) may be considered a random sample. That is, the logical structure of a superuniverse and the variation expected in random samples from it is the same for the observer sociologist as for the experimentalist. Imagining any experimental counterpart of the logical model is a more difficult matter, however. It is easy enough for the experimentalist to imagine repeated experiments under identical conditions, whether or not he can actually perfect his technique to the degree that he can reproduce conditions identically. His universe of possibilities can therefore be put into meaningful terms; it can at

least be imagined, even if it cannot actually be produced. It is not so easy for the sociologist to imagine a set of observations repeated under conditions identical with those of one date. The fact of change in social and cultural phenomena renders unrealistic any conception of identical repetition of the complex of factors conditioning characteristics such as fertility and level of living. The concept of the universe of possibilities – that is all possible sets of measures on fertility and level of living that could possibly be produced in the thousand rural counties of the United States under conditions exactly similar to those of 1930 – the concept has neither a realistic counterpart nor a readily imaginable counterpart. To what, then, does the variation expected from random sampling from such a universe of possibilities correspond? Only a feat of imagination involving an infinite prolongation of a present moment, where conditioning factors remain the same but ‘chance’ factors continue to produce random variation can supply the answer.“ (Hagood 1941, S. 429f.)

Die Ausführungen zeigen, in welche Schwierigkeiten man gerät, wenn man versucht, die Idee einer hypothetischen Superpopulation ernst zu nehmen. Die Vorstellung, daß das, was an einem bestimmten Ort und zu einer bestimmten Zeit geschieht, unter gleichen Bedingungen beliebig oft wiederholt werden könnte, ist schon als ein Gedankenexperiment obskur; ganz abgesehen von dem Einwand, daß vermutlich das gleiche herauskommen wird, wenn sich etwas unter *identical conditions* wiederholt. Ein Ausweg aus den logischen Schwierigkeiten ist nur möglich, wenn man sich nicht auf hypothetische Populationen, sondern auf Prozesse bezieht, durch die Sachverhalte und Ereignisse zustande gekommen sein könnten. Dies ermöglicht auch eine sinnvolle Reformulierung der Fragestellung: Für welche Erkenntnisinteressen kann es sinnvoll sein, solche Prozesse als Realisationen von Zufallsgeneratoren zu konzipieren und infolgedessen sowohl von ihrer sachlichen Beschaffenheit als auch von ihren historischen Veränderungen zu abstrahieren?

Kapitel 7

Wahrscheinlichkeiten und Chancen

Bisher wurde die Grundidee einer probabilistischen Sozialstatistik besprochen: daß man sich soziale Sachverhalte und Vorkommnisse so vorstellen könne, als ob sie durch Zufallsgeneratoren hervorgebracht werden. Es sollte auch bereits deutlich geworden sein, daß es sich um eine fragwürdige Idee handelt. Eine besondere Schwierigkeit resultiert daraus, daß Zufallsgeneratoren in der Wahrscheinlichkeitstheorie *als Verfahren* betrachtet werden und sich nicht unmittelbar auf empirische Prozesse beziehen. Die Schwierigkeit besteht darin, daß Prozesse, durch die soziale Sachverhalte und Ereignisse entstehen, in den meisten Fällen nicht als Verfahren verstanden werden können. In diesem Kapitel soll das Problem etwas genauer besprochen werden, um verständlich zu machen, wie sich der Wahrscheinlichkeitsbegriff in der Sozialstatistik zu einem bloß rhetorisch verwendeten Deutungsschema entwickelt hat.

7.1 Schwierigkeiten für den Theorieansatz

In den folgenden zwei Abschnitten sollen zunächst einige der Schwierigkeiten kenntlich gemacht werden, die entstehen, wenn man in der Sozialstatistik von Wahrscheinlichkeiten sprechen möchte und sich zu diesem Zweck auf fiktive Zufallsgeneratoren bezieht.

7.1.1 Sinngrenzen der Verfahrensidee

1. Wie schon in Abschnitt 5.1 besprochen wurde, kann dem Begriff eines Verteilungsgesetzes dann ein nachvollziehbarer Sinn gegeben werden, wenn sich die dafür erforderliche Bezugnahme auf einen Zufallsgenerator explizieren läßt; das soll heißen: wenn sich der Zufallsgenerator als ein prinzipiell realisierbares Verfahren beschreiben läßt. Wenn dies der Fall ist, kann man ein Verteilungsgesetz als Charakterisierung der Funktionsweise eines Verfahrens verstehen. Exemplarisch kann man an Glücksspiele denken, die sich in ihrer Funktionsweise durch ein Verteilungsgesetz charakterisieren lassen. Die bisher zur Diskussion gestellten Vorbehalte gegen das Reden von Verteilungsgesetzen in der Sozialstatistik haben sich hauptsächlich darauf bezogen, daß unklar bleibt, ob und ggf. wie soziale Prozesse als Realisationen von Verfahren verstanden werden können. Das Argument bestand insoweit darin, daß – solange eine solche Explikation nicht erfolgt – die gedankliche Bezugnahme auf Zufallsgeneratoren rein fiktiv bleibt.

2. Aber auch wenn man diesen Einwand zunächst zurückstellt, bleibt noch eine weitere Frage: in welcher Weise durch eine gedankliche Bezugnahme auf Zufallsgeneratoren irgendetwas *erklärt* werden könnte. Denn mit Überlegungen, die sich an der Vorstellung eines Zufallsgenerators orientieren, kann nicht erklärt werden, ob und wann Ereignisse auftreten, die durch den Zufallsgenerator erzeugt werden *könnten*. Wenn man einen Zufallsgenerator durch ein Verteilungsgesetz beschreibt, macht man eine Aussage darüber, wie das Verfahren funktioniert, aber nicht darüber, ob, wann und wo es zu Realisationen des Verfahrens kommt. Man denke z. B. an ein Würfelspiel. Wenn es durch eine bestimmte Wahrscheinlichkeitsverteilung charakterisiert wird, wird in keiner Weise darauf Bezug genommen, ob, wo, wann und von wem gewürfelt wird. Die Wahrscheinlichkeitsaussagen beziehen sich nicht auf empirische Ereignisse, die in unserer Erfahrungswelt stattfinden, sondern ausschließlich auf ein Verfahren. Hier knüpft auch die Idee der Wiederholbarkeit an. Zu einem Verfahren gehört die Idee, daß es wiederholt realisiert werden kann. Ohne eine zumindest gedankliche Bezugnahme auf Wiederholungen würde es keinen Sinn machen, sich um ein Verständnis der Eigenschaften eines Verfahrens zu bemühen.

3. Es ist hilfreich, zur gedanklichen Orientierung ein Bild zu verwenden:

$$\boxed{\mathcal{G}} \longrightarrow \omega$$

Der Zufallsgenerator $\mathcal{G}$ kann verwendet werden, um Situationen eines gewissen Typs $(\mathcal{S}, \tilde{\mathcal{X}})$ zu erzeugen. Jedesmal, wenn der Zufallsgenerator aktiviert wird, entsteht eine Situation des Typs $\mathcal{S}$, die durch einen Wert im Merkmalsraum $\tilde{\mathcal{X}}$ charakterisiert werden kann. Stattdessen kann man auch von einer Zufallsvariablen $\dot{X}$ sprechen, die Werte im Merkmalsraum $\tilde{\mathcal{X}}$ annehmen kann. Ein Verteilungsgesetz charakterisiert den Zufallsgenerator bzw. die ihn repräsentierende Zufallsvariable durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung. Man gewinnt dadurch eine Einsicht in die Funktionsweise des Zufallsgenerators, so daß sich Fragen der folgenden Art beantworten lassen: *Wenn* der Zufallsgenerator aktiviert wird, mit welchen Wahrscheinlichkeiten können verschiedene Arten von Situationen auftreten?

4. Man kann die Frage auch so formulieren: Mit welchen Wahrscheinlichkeiten nimmt eine Zufallsvariable ihre verschiedenen möglichen Werte an? Aber diese verkürzte Formulierung kann leicht irreführend werden. Denn der Begriff eines Verteilungsgesetzes für eine Zufallsvariable impliziert keinerlei Aussage darüber, ob, wann und wo die Zufallsvariable überhaupt irgendeinen Wert annimmt. Man kann exemplarisch an einen Vorschlag von Laplace (1814/1932, S. 51f.) denken, daß man sich das Zustandekommen des Geschlechts von Neugeborenen so vorstellen könne, daß bei jeder Geburt eine Ziehung aus einer Urne vorgenommen wird, die zwei Sorten von Kugeln enthält. Kennt man in diesem Fall das Verteilungsgesetz, also die Proportionen, in denen die Urne die beiden Sorten von Kugeln enthält, kann man sagen, mit welcher Wahrscheinlichkeit es ein Junge oder ein Mädchen wird. Aber man gewinnt daraus kein Wissen darüber, ob es überhaupt zu einer Geburt kommen wird. Darüber, ob, wann und wo ein Prozeß in Gang gesetzt wird, der schließlich dazu führt, daß ein Junge oder ein Mädchen geboren wird, macht das Modell nicht nur keine Aussage, sondern es liefert auch keinerlei Ansatzpunkt, um über diese Frage nachzudenken.

5. Werden Begriffsbildungen und Vorstellungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung in einem verfahrenstechnischen Kontext verwendet, ist der Sachverhalt leicht durchschaubar: Man möchte herausfinden, wie ein Verfahren funktioniert, und man abstrahiert gerade deshalb von der Frage, ob, wann und wo es sinnvoll sein könnte, das Verfahren anzuwenden. Die Einsicht, daß Zufallsgeneratoren als Verfahren konzipiert sind, geht jedoch leicht verloren, wenn man soziale Prozesse durch Zufallsgeneratoren zu deuten versucht. Da es diese Prozesse in der sozialen Realität immer schon gibt, kann leicht der Eindruck entstehen, daß man durch eine gedankliche Bezugnahme auf Zufallsgeneratoren auch das In-Erscheinung-Treten sozialer Sachverhalte und Ereignisse erklären könne. Diesen falschen Eindruck zu kritisieren, genügt indessen nicht. Denn in der Rhetorik der probabilistischen Sozialstatistik geht es ihr ja gerade darum, Modelle zu konstruieren, mit denen *empirisch realisierte* Häufigkeitsverteilungen erklärt werden können. Somit entsteht eine bemerkenswerte Frage: Wie kann der Anschein einer solchen Erklärung erzeugt werden, wenn man für die Modellkonstruktion Zufallsgeneratoren verwendet, die sich nur auf Verfahren beziehen? Offenbar muß man in irgendeiner Weise Annahmen darüber einführen, wie, wo und wann die Zufallsgeneratoren tatsächlich aktiviert werden.

6. Um das Problem genauer zu verstehen, beziehen wir uns auf Überlegungen von L. v. Bortkiewicz (1898), in denen er versucht hat, die Poisson-Verteilung als ein Verteilungsgesetz – von ihm „Gesetz der kleinen Zahlen“ genannt – zu deuten, mit dessen Hilfe seltene Ereignisse erklärt werden können. Das erste Kapitel seines Buches beginnt mit folgenden Bemerkungen:

„Bezeichnet p die Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines bestimmten Ereignisses A und $q = 1 - p$ die Wahrscheinlichkeit des Nichteintretens von A bei *einem* Versuch, so stellt

$$(1) \qquad \frac{n\,(n-1)\cdots(n-x+1)}{1\cdot 2\cdots x}\,p^x q^{n-x}$$

die Wahrscheinlichkeit des x maligen Eintretens von A bei n Versuchen dar.

Läßt man die Zahl n *in infinitum* anwachsen und p bis auf Null herabsinken und zwar so, daß das Produkt $np = m$ dabei stets unverändert bleibt, so wird sich (1) dem Grenzwert

$$(2) \qquad w_x = \frac{m^x\,e^{-m}}{1\cdot 2\cdots x}$$

nähern. Die Formel setzt voraus, daß die Zahl x im Verhältnis zu der Zahl n klein ist. Die Größe m, welche, ihrem Begriff nach, positiv sein muß, aber sowohl eine ganze Zahl als ein echter oder unechter Bruch sein kann, drückt die mathematische Erwartung der Zahl der Fälle aus, bei denen das Ereignis A unter n Fällen oder Versuchen vorkommt.“ (v. Bortkiewicz 1898, S. 1)

Soweit lassen sich die Ausführungen einfach nachvollziehen, indem man sich gedanklich auf artifizielle Zufallsgeneratoren bezieht, z. B. auf ein Urnenschema. Darauf deutet auch v. Bortkiewicz’ Verwendung des Wortes ‘Versuch’ hin. Der Übergang von (1) zu (2) wurde zuerst von S. D. Poisson (1781 – 1840) vorgeschlagen, um bei kleinen Ereigniswahrscheinlichkeiten eine bessere Approximation für die Binomialverteilung (1) zu gewinnen, und (2) wird seither als Poisson-Verteilung bezeichnet.

7. Im weiteren Verlauf des ersten Kapitels seines Buches bespricht v. Bortkiewicz eine Reihe von Eigenschaften der Poisson-Verteilung, die uns hier nicht zu interessieren brauchen. Zu überlegen sind jedoch die sozialstatistischen Anwendungen, die v. Bortkiewicz in seinem zweiten Kapitel vornimmt. Es beginnt mit folgenden Bemerkungen:

„Es soll nunmehr der Versuch gemacht werden, die Formeln des ersten Kapitels auf statistische Reihen absoluter Zahlen anzuwenden, welche für eine Reihe von Kalenderjahren angeben, wieviel Male im Laufe eines jeden Jahres ein bestimmtes Ereignis in einer gegebenen Gesellschaft von Menschen vorgekommen ist. Hierbei werden solche Beispiele gewählt, bei denen die Bedingung erfüllt ist, daß den einzelnen Gliedern der ins Auge gefaßten statistischen Reihe jeweils sehr große Zahlen von Beobachtungen bezw. von beobachteten Menschen entsprechen (mindestens einige Tausend), während die Zahlen selbst, aus denen sich die statistische Reihe zusammensetzt, kleine Zahlen sind (nicht über 20 hinausgehend).“ (v. Bortkiewicz 1898, S. 17)

v. Bortkiewicz bespricht dann vier Beispiele. Zur Illustration beziehen wir uns auf das erste Beispiel: Selbstmorde von Kindern in Preußen.

„Nachstehende Tabelle [Tabelle 1] enthält die Zahlen der von Knaben und Mädchen unter 10 Jahren in Preußen im Zeitraume 1869 – 1893 begangenen Selbstmorde. [. . .]

Unsere Aufgabe besteht nun darin, zu prüfen, ob die angeführten Ergebnisse der Statistik auf das uns aus dem ersten Kapitel bekannte Schema der Wahrscheinlichkeitsrechnung zurückgeführt werden können. Hierbei hat man sich zu fragen: in wieviel Fällen aus 25 würden sich die Ergebnisse 0, 1, 2 usw. am wahrscheinlichsten einstellen, gesetzt, daß jenes Schema zuträfe? Die Antwort wird durch die Produkte $25 \cdot w_x$ geliefert, wobei w_x dieselbe Bedeutung hat wie in § 1 [vgl.o. die Formel (2)]. Nur hat man in die maßgebende Formel (2) des § 1 anstatt der Unbekannten m den wahrscheinlichsten Wert ihrer, nämlich den Mittelwert

$$m' = \frac{49}{25} = 1.96$$

Tabelle 1 Selbstmorde von Kindern in Preußen.

Jahr	Knaben	Mädchen	Zusammen
1869	2	1	3
70	3	-	3
71	1	1	2
72	4	-	4
73	1	1	2
74	4	-	4
75	-	2	2
76	3	1	4
77	-	-	-
78	1	-	1
79	2	-	2
80	6	-	6
81	3	-	3
82	4	-	4
83	1	-	1
84	-	-	-
85	2	-	2
86	2	-	2
87	1	-	1
88	1	1	2
89	-	-	-
90	2	1	3
91	1	1	2
92	1	1	2
93	4	1	5
Im ganzen	49	11	60

einzusetzen. Auf diese Weise läßt sich nachfolgende Zahlenreihe berechnen:

x	$25 \cdot w_x$	x	$25 \cdot w_x$
0	3.4	5	0.9
1	6.8	6	0.3
2	6.8	7	0.1
3	4.5	8	0.0
4	2.2		

Nennt man, nach Lexis' Vorgang, *Dispersion* die Art, wie sich die Glieder einer statistischen Reihe um den Mittelwert der Reihe verteilen, oder anders das Bild von den Schwankungen, welche eine statistische Reihe darbietet, so kann man sagen, daß es sich nunmehr darum handelt, die *erwartungsmäßige* Dispersion der Elemente x, wie sie sich in der Reihe der Werte $25 \cdot w_x$ darstellt, der *effektiven* Dispersion der nämlichen Elemente, wie diese in der Reihe der Werte l_x zum Ausdruck kommt, gegenüberzustellen, und zuzusehen, ob beide Dispersionen in dem Maße übereinstimmen, daß die Abweichungen der Größen l_x von den entsprechenden Größen $25\,w_x$ als *zufällige* im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung gedeutet werden können.“ (v. Bortkiewicz 1898, S. 17ff.)

8. v. Bortkiewicz vergleicht dann die „theoretisch zu erwartenden“ mit den tatsächlich beobachteten Häufigkeiten und prüft auch die Streuung der jährlichen Anzahlen, wobei er sich an Lexis' Dispersionstheorie orientiert. Uns interessieren hier jedoch nicht diese Goodness-of-Fit-Überlegungen, vielmehr die Frage, in welcher Weise in diesem Beispiel die Idee eines Zufallsgenerators verwendet wird. v. Bortkiewicz' Gedankengang unterstellt, daß es einen Zufallsgenerator $\mathcal{G}$ gibt, der seine Daten erzeugt haben könnte. Stattdessen kann man sich auch auf eine Zufallsvariable beziehen, als deren Realisationen die Daten betrachtet werden. Die Daten bestehen aus 25 Werten (Bezug nehmend auf die Selbstmorde der Knaben, die auch v. Bortkiewicz in der o.a. Rechnung verwendet). v. Bortkiewicz' Frage ist, ob man für diesen fiktiv unterstellten Zufallsgenerator eine Poisson-Verteilung annehmen kann; und ergänzend, ob man für alle 25 Jahre den gleichen Zufallsgenerator unterstellen kann. Beide Fagen werden von v. Bortkiewicz bejaht. Aber ob zu Recht, ist hier nicht unsere Frage. Könnten die Daten nicht mit einer Poisson-Verteilung beschrieben werden, würde aus dem Ansatz des Gedankengangs bloß folgen, daß man nach einer anderen Verteilung suchen müßte. Hier interessiert vielmehr, welche Vorstellungen über das Zustandekommen von Selbstmorden durch die Annahme eingeführt werden, daß sie als Ergebnisse eines (irgendeines) Zufallsgenerators entstehen.

9. Ein offensichtliches Problem besteht darin, daß man sich in diesem Fall den Zufallsgenerator nicht als ein Verfahren vorstellen kann, jedenfalls nicht im üblichen Sinn des Wortes ‘Verfahren’. Denn beim üblichen Verständnis setzt das Wort einen Akteur voraus, der das Verfahren anwendet und dadurch Prozesse in Gang setzt, die als Realisationen des Verfahrens betrachtet werden können. Die Frage ist: Wer betätigt den Zufallsgenerator $\mathcal{G}$, der mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit Selbstmorde entstehen läßt? Sind es die Kinder, von denen einige schließlich einen Selbstmord begehen? Vielleicht soll man es sich so vorstellen: Es gibt einen Zufallsgenerator, und einmal pro Jahr zieht jedes Kind entweder eine weiße oder schwarze Kugel, wodurch dann über das weitere Schicksal entschieden wird. Die Vorstellung erscheint zwar merkwürdig, könnte aber in spekulativer Weise einen Anschluß an den wahrscheinlichkeitstheoretischen Begriff eines Zufallsgenerators herstellen. Es bleibt jedoch eine bemerkenswerte Besonderheit im Vergleich zu anderen Beispielen, in denen von einer Analogie zu Zufallsgeneratoren Gebrauch gemacht wird. Als Beispiel kann man an Laplace' Urne denken, mit der er sich den Prozeß vorstellbar machen möchte, durch den darüber entschieden wird, ob ein Mädchen oder ein Junge geboren wird. In diesem Beispiel kann man sich zumindest gedanklich einen Prozeß vorstellen, auf dessen Ablauf sich der Zufallsgenerator beziehen soll; und man kann sich auch vorstellen, wie der Prozeß in Gang gesetzt werden kann. Aber bei den Selbstmorden von Kindern ist ein Prozeß, auf dessen Ablauf man sich mit der Idee eines Zufallsgenerators beziehen könnte, nicht erkennbar.

7.1.2 Situationen und Chancen

1. Die Schwierigkeiten entstehen daraus, daß es in der Sozialstatistik erforderlich wird, zwischen Akteuren und Beobachtern zu unterscheiden. Bei der gedanklichen Bezugnahme auf einen Zufallsgenerator ist das nicht notwendig. Der Zufallsgenerator kann als ein Verfahren konzipiert werden, und es kann offenbleiben, ob, wann, wo und von wem der Zufallsgenerator aktiviert wird. Der Statistiker, der Einsichten in die Funktionsweise eines Zufallsgenerators gewinnen möchte, kann sich beliebige Subjekte vorstellen, die ihn betätigen, weil die Theoriebildung darauf keinen Bezug nimmt. Infolgedessen kann er auch mit den Subjekten, die den Zufallsgenerator möglicherweise aktivieren, eine gemeinsame erkenntnistheoretische Perspektive einnehmen.

2. Eine ganz entsprechende Betrachtungsweise kann auch ein Psychologe einnehmen, der mit Menschen oder Tieren Experimente durchführt und sich für die Theoriebildung der Konzeption eines Zufallsgenerators bedient. Die Subjekte, mit denen der Psychologe experimentiert, kommen dann nicht als Subjekte eines Verfahrens in Betracht – das ist vielmehr der Psychologe selbst –, sondern nur als Material, dessen Eigenschaften und Reaktionsweisen mit Hilfe des Verfahrens geprüft werden sollen. Für die Theoriebildung kann infolgedessen davon abstrahiert werden, daß es sich bei den Subjekten, mit denen ein Psychologe experimentiert, selbst um Akteure handelt. Es sind nicht sie, die – als Akteure – das experimentelle Verfahren in Gang setzen, sondern dies geschieht durch den Psychologen.[1]

3. Der Sozialstatistiker kann sich indessen das Geschehen in seinem Gegenstandsbereich nicht in der Weise unterwerfen, wie es ein Techniker mit Maschinen, ein Biologe mit Pflanzen oder ein Psychologe mit Tieren und Menschen machen kann. Er kann nicht ohne weiteres davon abstrahieren, daß die sozialen Sachverhalte und Ereignisse, für deren Zustandekommen er sich interessiert, durch Akteure hervorgebracht werden, die ihrem eigenen Willen folgen. Er kann zunächst nur beobachten, wie die in der Gesellschaft tätigen Akteure sich verhalten und Sachverhalte und Ereignisse hervorbringen. Infolgedessen gibt es keinen unmittelbaren Anknüpfungspunkt für eine Konzeption von Zufallsgeneratoren als Verfahren. Die Vorstellung, daß die Tätigkeiten sozialer Akteure darin bestehen, daß

[1] Infolgedessen ist auch klar, daß man in der experimentellen Psychologie strenggenommen keine Erkenntnisse über menschliche Akteure gewinnen kann, sondern nur über die Funktionsweise von Verfahren, wenn und insoweit Menschen solchen Verfahren unterworfen werden können.

sie Zufallsgeneratoren aktivieren, die dann ihrerseits mit gewissen Wahrscheinlichkeiten Sachverhalte und Ereignisse hervorbringen, liefert in den meisten Fällen kein plausibles Bild sozialer Aktivitäten. Infolgedessen entsteht für die probabilistische Sozialstatistik eine theoretische Sackgasse. Ein scheinbarer Ausweg entsteht nur durch einen Wechsel in der Rhetorik. Um der Vorstellung, daß soziale Sachverhalte und Ereignisse durch Zufallsgeneratoren hervorgebracht werden, einen Sinn zu geben, kann der Sozialstatistiker versuchen, an ein Reden von „Chancen“ anzuknüpfen.

4. Das Wort ‘Chance’ hat zunächst einen handlungspraktischen Sinn: Menschen können über Handlungschancen nachdenken und kommunizieren. Das Wort bezieht sich in diesem Kontext auf Handlungsmöglichkeiten, die man ausfindig machen, wahrnehmen und ggf. realisieren kann. Allerdings ist dieses handlungspraktische Verständnis des Chancenbegriffs für die Sozialstatistik unbrauchbar. Denn in diesem Sinn impliziert der Begriff eine Bezugnahme auf Akteure, die als Subjekte der Wahrnehmung von Handlungschancen vorstellbar sind. Fragestellungen der Sozialstatistik beziehen sich jedoch nicht darauf, wie Subjekte ihre Handlungsmöglichkeiten wahrnehmen und einschätzen; sondern es soll berechenbar gemacht werden, wie sich soziale Akteure unter jeweils gegebenen Bedingungen verhalten bzw. welche Folgen aus ihrem Verhalten resultieren. Infolgedessen ist ein Chancenbegriff erforderlich, durch den Chancen nicht als Handlungschancen von Subjekten, sondern als Eigenschaften von Situationen vorstellbar werden, in denen sich soziale Akteure befinden.

5. Hierfür kann die probabilistische Sozialstatistik an zwei Gedankengänge anknüpfen. Erstens an eine „soziologische Wende“ in der Gesellschaftstheorie, durch die der Gedanke verbreitet worden ist, daß das Verhalten von Menschen durch ihre gesellschaftlichen Verhältnisse bedingt oder sogar bestimmt wird.[2] Der Gedanke ist auch deshalb bemerkenswert, weil er sich sowohl mit einer handlungspraktischen als auch mit einer sozialstatistischen Betrachtungsweise verbinden läßt. Aus der handlungspraktischen Perspektive erscheint es unmittelbar plausibel, daß Handlungsmöglichkeiten auch davon abhängen, in welchen Situationen sich Handlungssubjekte befinden. Zwar macht aus dieser Perspektive die Vorstellung, daß Handlungsweisen durch Situationen *bestimmt* werden, keinen Sinn. Aber schon die Frage, die sich auf Handlungsmöglichkeiten richtet, impliziert eine Bezugnahme auf Eigenschaften einer Situation. Andererseits kann auch die Sozialstatistik an den Gedanken anknüpfen, daß Handlungsmöglichkeiten von Menschen durch Eigenschaften einer jeweils gegebenen Situation bedingt oder bestimmt werden.

[2] Der Gedanke hat eine lange Tradition, die hier nicht besprochen werden kann. Exemplarisch kann man an folgende Bemerkung von P. L. Berger (1963, S. 106) denken: „Die Gesellschaft schreibt uns nämlich nicht nur vor, was wir zu tun, sondern auch, wer wir zu sein haben. Mit anderen Worten: Unser gesellschaftlicher Ort bestimmt nicht nur unser Verhalten, sondern auch unser Sein.“

6. Nun ist die probabilistische Sozialstatistik jedoch nicht an Handlungsmöglichkeiten interessiert, sondern daran, wie sich Menschen tatsächlich verhalten, bzw. an den resultierenden Sachverhalten und Ereignissen. Das heißt, der Sozialstatistiker ist nicht an Aussagen über Möglichkeiten im Sinne von Handlungsmöglichkeiten interessiert, sondern daran, mögliche Verhaltensweisen, Sachverhalte, Ereignisse durch Wahrscheinlichkeitsaussagen einschätzbar zu machen. Und an dieser Stelle liegt es nahe, sich an Begriffsbildungen und Vorstellungen der Wahrscheinlichkeitstheorie zu orientieren. Deren Ausgangspunkt ist ja ebenfalls das Interesse, Möglichkeiten durch Wahrscheinlichkeiten einschätzbar zu machen. Um dieses Interesse theoretisch verfolgen zu können, dient in der Wahrscheinlichkeitstheorie die Konzeption von Zufallsgeneratoren. Sie werden als Verfahren konzipiert, um durch eine begriffliche Abkopplung von Prozessen und Ereignissen, die in der Erfahrungswelt „autonom“ auftreten, eine (mathematische) Theoriebildung zu ermöglichen. Zwar kann die Idee eines Zufallsgenerators, wie sie in der Wahrscheinlichkeitstheorie konzipiert wird, nicht bruchlos übernommen werden, da die intendierten Anwendungen nicht verfahrenstechnisch expliziert werden können. Der Sozialstatistiker kann jedoch versuchen, den Begriff eines Zufallsgenerators für seine Zwecke umzudeuten.

7. Der Umdeutungsprozeß beginnt beim Chancenbegriff. Der Begriff spielt deshalb eine zentrale Rolle, weil durch ihn Möglichkeiten mit Eigenschaften einer Situation verknüpft werden. Aus handlungspraktischer Sicht ist das unmittelbar verständlich: Was ein Mensch tun *kann*, hängt auch von der Situation ab, in der er sich befindet. Das Erkenntnisinteresse des Sozialstatistikers kann hieran durch eine scheinbar geringfügige Veränderung der Formulierung anknüpfen: Was ein Mensch tun *wird*, hängt auch von der Situation ab, in der er sich befindet.[3] Ist man jedoch bei dieser Formulierung, gibt es eine Anschlußstelle für den Wahrscheinlichkeitsbegriff. Eine Situation kann dann als eine Gegebenheit betrachtet werden, in der sich unterschiedliche Möglichkeiten realisieren können; und man kann versuchen, die Realisierungsmöglichkeiten durch Wahrscheinlichkeiten einschätzbar zu machen. Es ist dann auch nicht erforderlich, ausschließlich an Handlungen von Akteuren zu denken, die in einer Situation realisiert werden können. Denn hat man den Situationsbegriff aus seiner ursprünglichen Verklammerung mit einer handlungspraktischen Perspektive herausgelöst, so daß man über Situationen als in der Realität vorhandene Gegebenheiten sprechen kann, kann man ihn auch mit beliebigen Vorstellungen über Prozesse verknüpfen, die in Situationen entstehen und ablaufen können. Man kann z. B. an eine unübersichtliche Straßenkreuzung denken, bei der

[3] Der Situationsbegriff sollte hier stets so verstanden werden, daß auch Eigenschaften von Menschen als Merkmale ihrer Situation aufgefaßt werden können. Für den gegenwärtigen Gedankengang ist es nicht erforderlich, genauer auf die Frage einzugehen, ob und ggf. wie eine Unterscheidung zwischen Situationen und Menschen zurechenbaren Eigenschaften gemacht werden kann.

mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit Verkehrsunfälle stattfinden.

8. Bemerkenswert ist, wie auf diese Weise ein spezifisch sozialstatistischer Chancenbegriff entsteht. Er unterscheidet sich einerseits, wie schon deutlich geworden sein sollte, von einem handlungspraktischen Chancenbegriff. Er unterscheidet sich indessen auch von einem Chancenbegriff, wie er in der Wahrscheinlichkeitstheorie durch eine gedankliche Bezugnahme auf Zufallsgeneratoren konzipiert wird. Zwar kann man in beiden Fällen Chancen und Wahrscheinlichkeiten begrifflich identifizieren. Dennoch gibt es einen bemerkenswerten Unterschied in der empirischen Explikation. Bei der gedanklichen Bezugnahme auf einen Zufallsgenerator bleibt offen, ob, wann, wo und von wem der Zufallsgenerator betätigt wird, so daß tatsächlich Sachverhalte oder Ereignisse entstehen. In diesem Kontext beziehen sich Wahrscheinlichkeitsaussagen auf die Funktionsweise von Verfahren. In der Sozialstatistik verändert sich indessen die Art und Weise, wie die Konditionalisierung vorgenommen wird. Der Chancenbegriff bezieht sich nicht länger auf ein Verfahren, sondern auf eine Situation, in der mit gewissen Wahrscheinlichkeiten mögliche Vorgänge realisiert werden. Infolgedessen verschwinden auch die Akteure. Oder genauer gesagt, an die Stelle von Akteuren treten Situationen; es ist dann z. B. eine Straßenkreuzung, die mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit Unfälle hervorbringt.

9. Auf diese Weise kann durch den sozialstatistischen Chancenbegriff eine neue Rhetorik eingeführt werden: *Man kann über Chancen so reden, als ob es sich um Eigenschaften einer Situation handelt*. Dies ermöglicht der probabilistischen Sozialstatistik auch einen neuen Blick auf soziale Akteure. Es ist nicht länger erforderlich, Menschen als Akteure sozialer Prozesse zu betrachten, sondern man kann sich darauf beschränken, sie als Vollzugsgehilfen für die Realisierung von Chancen zu betrachten, die als Eigenschaften einer jeweils gegebenen Situation vorausgesetzt werden. Dadurch ist man einerseits dem Descartes’schen Ideal näher gekommen: daß jede Vorstellung von Akteuren aus der wissenschaftlichen Naturbetrachtung verbannt werden sollte. Andererseits entsteht die Möglichkeit, in einer nicht handlungspraktischen Perspektive über gesellschaftliche Verhältnisse zu sprechen: Man kann sie als einen Komplex von Situationen konzeptualisieren, die durch ihnen zurechenbare Chancen charakterisiert werden können.

10. Die Bezüge zur Entwicklung der Soziologie, insbesondere zur Entwicklung des Sozialstrukturbegriffs, können hier nicht näher verfolgt werden.[4]

[4] Eine wichtige Bedeutung kommt sicherlich Emile Durkheim zu, insbesondere seinem Buch über den „Selbstmord“ (1897), in dem nicht nur mit einem sozialstatistisch konzipierten Chancenbegriff operiert wird, sondern überdies eine Rhetorik entwickelt wird, in der „die Gesellschaft“ als Subjekt der fiktiven Zufallsgeneratoren vorstellbar gemacht werden soll; z. B.: „Jede Gesellschaft hat in jedem Augenblick ihrer Geschichte jeweils eine bestimmte Neigung zum Selbstmord.“ (Durkheim 1897/1973, S. 32) In einer etwas anderen Variante hat auch Max Weber versucht, den Gegenstandsbereich der Soziologie durch einen sozialstatistischen Chancenbegriff zu konzipieren. Einen Hinweis geben

Die eben skizzierten Überlegungen lassen indessen erkennbar werden, wie sich durch die Verwendung des Chancenbegriffs auch Vorstellungen über Aufgaben einer probabilistischen Sozialstatistik entwickeln konnten. Die auf den ersten Blick merkwürdige Idee, empirisch ermittelbare Häufigkeitsverteilungen als Realisierungen von „zugrundeliegenden“ Wahrscheinlichkeitsverteilungen aufzufassen, erscheint zumindest rhetorisch dadurch vermittelbar, daß man die Wahrscheinlichkeitsverteilungen als „Beschreibungen“ von Chancen betrachtet, die sozialen Situationen als Eigenschaften zurechenbar sind. So könnte man auch versuchen, in v. Bortkiewicz’ Vorgehensweise einen Sinn zu finden, der sich nicht darin erschöpft, für eine gegebene Häufigkeitsverteilung nur nach einer anderen Darstellungsform zu suchen. Die in dem Beispiel von ihm intendierte Aussage könnte dann vielleicht so verstanden werden: Die Situation, in der Kinder im Zeitraum 1869 – 1893 in Preußen gelebt haben, läßt sich durch bestimmte Chancen für das Zustandekommen von Selbstmorden charakterisieren.[5] Zwar erfährt man daraus nichts über die Ursachen der Selbstmorde. Wir werden jedoch später sehen, wie in der probabilistischen Sozialstatistik versucht worden ist, auch diesen Vorbehalt durch die Entwicklung einer neuen Rhetorik hinfällig zu machen. Der Grundgedanke läßt sich an dieser Stelle schon andeuten: Wenn man soziale Situationen auf eine solche Weise durch Chancen charakterisieren kann, daß eine Bezugnahme auf Akteure überflüssig erscheint, kann es sinnvoll erscheinen, in den Chancen zugleich die Ursachen dafür zu sehen, welche Sachverhalte und Ereignisse in den Situationen realisiert werden.

z. B. folgende Bemerkungen: „Soziale ‘Beziehung’ soll ein seinem Sinngehalt nach aufeinander gegenseitig *eingestelltes* und dadurch orientiertes Sichverhalten mehrerer heißen. Die soziale Beziehung *besteht* also durchaus und ganz ausschließlich: in der *Chance*, daß in einer (sinnhaft) angebbaren Art sozial gehandelt wird, einerlei zunächst: worauf diese Chance beruht.“ „Eine soziale Beziehung kann ganz vorübergehenden Charakters sein oder aber auf Dauer, d. h. derart eingestellt sein: daß die Chance einer kontinuierlichen *Wiederkehr* eines sinnentsprechenden (d. h. dafür geltenden und demgemäß erwarteten) Verhaltens besteht. *Nur* das Vorliegen dieser Chance: – der mehr oder minder großen *Wahrscheinlichkeit* also, daß ein sinnentsprechendes Handeln stattfindet, und *nichts* darüber hinaus – bedeutet der *‘Bestand’* der sozialen Beziehung, was zur Vermeidung falscher Vorstellungen stets gegenwärtig zu halten ist.“ (Weber 1921, S. 13f.)

[5] Eine Fülle von Beispielen für eine solche Rhetorik findet sich in dem Buch „What are the chances?“ von B. Siskin, J. Staller und D. Rorvik (1989).

7.2 Der Theorieansatz von W. Lexis

Der im vorangegangenen Abschnitt skizzierte Gedankengang wurde in systematischer Form zuerst von Wilhelm Lexis (1837–1914) zur Begründung einer probabilistischen Sozialstatistik ausgearbeitet. Da seine Überlegungen sehr einflußreich geworden sind, sollen sie in diesem Abschnitt etwas genauer besprochen werden.[6]

7.2.1 Bezugnahme auf Lebensverläufe

1. Lexis’ erste einflußreiche Publikation ist die „Einleitung in die Theorie der Bevölkerungsstatistik“ (1875). Sie beginnt mit folgender Bemerkung:

„Die Aufgabe der wissenschaftlichen Bevölkerungsstatistik besteht in der methodischen Gruppirung und Untersuchung der Thatsachen, die sich aus der exacten Massenbeobachtung der allgemein bedeutsamen Lebensmomente der menschlichen Individuen ergeben.“ (Lexis 1875, S. 1)

Etwas genauer werden dann die Aufgaben der Bevölkerungsstatistik folgendermaßen angegeben:

„Das bevölkerungsstatistische Material wird durch unmittelbare Beobachtung an den Individuen gewonnen, nicht also durch Beobachtung der Massenergebnisse der menschlichen Thätigkeit (Production, Handel u.s.w.). Jedoch schließen wir diejenigen Untersuchungen aus, welche die menschlichen Individuen wesentlich nach ihrer physischen Seite, als Naturwesen im normalen oder abnormalen Zustand erfassen (anthropologische und medicinische Statistik), sowie diejenigen, welche sich mit gewissen Massenerscheinungen des intellectuellen und moralischen Lebens beschäftigen. Es bleibt dann als eigenthümliche Aufgabe der Bevölkerungsstatistik übrig die zahlenmässige Untersuchung der normalen Bedingungen des Bestandes und des Wechsels einer Bevölkerungsmasse. Eine solche Masse bestimmt und ändert sich dadurch, dass ihre Mitglieder geboren werden, altern, sich verheirathen, sich vermehren, verwittwen, wiederholt heirathen und sterben. Ausserdem sind wegen der Beschränkung der Untersuchung auf ein begrenztes Staatsgebiet die Zu- und Abzüge zu berücksichtigen. Die Theorie der Bevölkerungsstatistik hat nun die Grundsätze aufzustellen, nach denen diese Massenerscheinungen, die Gesammtergebnisse von zahlreichen, gewissermassen molecularen Einzelprocessen, zu beobachten und wissenschaftlich zu bewältigen sind.“ (Lexis 1875, S. 2)

[6] Biographische Hinweise finden sich bei Johnson und Kotz (1997, S. 305f.). Über Lexis’ Einfluß schrieb Tschuprow (1905, S. 13), daß „die Entwicklung der modernen theoretischen Statistik durchweg an die Lexis’schen Untersuchungen anknüpft.“ Und weiter: „. . . daß in allen Ländern, wo sich heute auf dem Gebiete der statistischen Theorie etwas regt, die Anfänge der Bewegung auf Lexis zurückgehen. Der mächtige Aufschwung der statistischen Theorie in England, das nahe daran ist, die Führerschaft auf diesem Gebiete zu übernehmen, ist neben Fr. Galton von Fr. Y. Edgeworth eingeleitet worden, dessen Arbeiten von unmittelbarem Einflusse Lexis’ zeugen. Der Däne Westergaard, der Russe v. Bortkiewicz, um von den deutschen Schülern Lexis’ nicht zu reden, schulden Lexis die Elemente ihrer Auffassungsweise und wohl auch den ersten Impuls zu theoretischer Arbeit auf dem Gebiete der Statistik.“ (S. 70)

Was ist hier mit „wissenschaftlich bewältigen“ gemeint? Es gibt zwei unterschiedliche Arten von Fragestellungen. Zunächst widmet Lexis einen Großteil seines Buches der Entwicklung eines Begriffsrahmens, um die Dynamik der Veränderungen einer „Bevölkerungsmasse“ durch Ereignisse der angegebenen Art (Geburten, Heiraten, Sterbefälle usw.) deskriptiv darzustellen. Man kann insoweit von einer dynamisch konzipierten Sozialstatistik sprechen, wie sie auch in der neueren empirischen Sozialforschung in Form von „Lebensverlaufsanalysen“ betrieben wird.[7]

2. Mit Details der Lexis'schen Konzeption einer dynamischen Sozialstatistik brauchen wir uns hier nicht zu beschäftigen. Wichtig ist, wie er den Zusammenhang zur Wahrscheinlichkeitstheorie herstellt. Nachdem Lexis seine der Intention nach deskriptiven Begriffsbildungen dargelegt hat, beginnt ein neuer Abschnitt mit folgenden Bemerkungen:

„In den vorhergehenden Abschnitten sind die Methoden entwickelt worden, nach denen Veränderungen einer bevölkerungsstatistischen Masse sei es theoretisch genau oder mit einer dem praktisch zugänglichen Material entsprechenden Näherung beobachtet werden können. Vorzugsweise haben wir die Mittel gesucht, um Reihen von Massen aufzustellen, von denen jede aus der nächstvorhergehenden dadurch hervorgegangen ist, dass eine Anzahl von Angehörigen der letzteren in einen bestimmten neuen Zustand getreten ist oder ein bestimmtes neues Merkmal erhalten hat.

Haben wir aber auch in dieser Weise das theoretische Schema mit empirischem Stoffe ausgefüllt, so ist dadurch doch zunächst nichts weiter erreicht, als eine systematische Gruppirung von Beobachtungsdaten, die zu einander in gewissen thatsächlichen Beziehungen stehen. Von einer Theorie der Erscheinungen im Sinne der physikalischen Wissenschaften sind wir auf diesem Standpunkte noch weit entfernt; denn eine solche würde verlangen, dass wir die beobachteten thatsächlichen Beziehungen in exacter Weise auf ihre Ursachen zurückführten und aus der Kenntnis der Ursachen feststellten, wie sich die analogen Erscheinungen in der Zukunft wiederholen würden.“ (Lexis 1875, S. 93f.)

Theoriebildung beginnt also für Lexis mit der Frage nach Ursachen und mit der Absicht, solche Kenntnisse für Voraussagen zu verwenden.

3. Aber wie kann der Sinn einer solchen Frage nach Ursachen genauer angegeben werden? Es treten sogleich Schwierigkeiten auf, die Lexis folgendermaßen erläutert:

„Nehmen wir den möglichst einfachen Fall, die Veränderungen, welche eine Masse Gleichaltriger durch die Sterblichkeit ihrer Mitglieder von Altersclasse zu Altersclasse erleidet. Die Ueberlebens- und Sterbeordnung derselben können wir genau oder näherungsweise feststellen, aber über das *System* von Ursachen, vermöge dessen aus L_a Lebenden in der $(a+1)$ten Altersclasse m_{a+1} sterben, sagen uns diese Zahlenreihen nichts. In jedem einzelnen Falle können wir zwar die Todesursache beobachten, aber diese Erkenntnis gewährt uns keinen Aufschluss über die Frage, weshalb *im Ganzen* m_{a+1} Personen gestorben und $L_a - m_{a+1}$ lebend geblieben sind. Sie dient höchstens dazu, um uns von der ausserordentlichen Mannichfaltigkeit der Bedingungen des Sterbens und Ueberlebens zu überzeugen und zu dem Geständnis zu nöthigen, dass wir nicht hoffen dürfen, die Gründe des Zusammentreffens und die Verbindung dieser Bedingungen zu durchdringen und zu analysiren.“ (Lexis 1875, S. 94)

[7]In der methodischen Begleitdiskussion findet auch immer noch eine Auseinandersetzung mit dem von Lexis entwickelten Begriffsrahmen statt; vgl. exemplarisch Mayer und Huinink (1990).

Die Überlegungen verweisen auf ein Problem, das bereits in Abschnitt 5.3 angesprochen worden ist. Der Sozialstatistiker möchte herausfinden, wie die Elemente einer „Masse“ oder eines „Kollektivgegenstandes“ entstanden sind bzw. wie sie ihre jeweils bestimmten Eigenschaften bekommen haben; aber es gibt keinen begrifflich faßbaren Prozeß, auf den man sich empirisch beziehen könnte. Wollte man empirisch vorgehen, müßte man sich auf die Einzelfälle beziehen, die die Elemente der „statistischen Massen“ bilden. Aber dies widerspricht dem theoretischen Ansatz einer Statistik, die ihren Gegenstand durch Gesamtheiten und für sie definierte Häufigkeitsverteilungen definiert.[8]

7.2.2 Soziale Chancensysteme

1. In dieser Sackgasse angelangt, nimmt indessen der Gedankengang eine bemerkenswerte Wendung. Lexis' Ausführungen gehen so weiter:

„Kann aber die innere Natur des Verursachungssystems, welches eine gegebene Massenerscheinung der Sterblichkeit bedingt, nicht aufgedeckt und zergliedert werden, so wird die naturwissenschaftliche Aufgabe der Bevölkerungsstatistik auf die Untersuchung beschränkt, ob die wirkenden unbekannten Ursachensysteme einem regellosen Wechsel unterworfen sind, oder ob sie sich mit einer gewissen Constanz behaupten. Im letzteren Falle werden auch in den beobachteten Resultaten gewisse Regelmässigkeiten hervortreten, und umgekehrt kann man aus solchen beobachteten Regelmässigkeiten auf eine annähernde Constanz der Ursachensysteme zurückschliessen.

Aus diesen Bemerkungen ergibt sich sofort, dass die naturwissenschaftliche Untersuchung der statistischen Massenerscheinungen nur die Aufgabe hat, die inneren Beziehungen derselben in der Form darzulegen, welche der Wahrscheinlichkeitsrechnung eigenthümlich sind.

Wir haben es zu thun mit einer gewissen Zahl von Fällen eines Anfangszustandes, aus denen eine gewisse Zahl von Fällen eines Endzustandes hervorgeht; von den zwischen Anfangs- und Endzustand liegenden physischen Processen wissen

[8]Gleich zu Beginn seines Buches (1875, S. 1) hat Lexis darauf hingewiesen: „Bei der Bildung von Massen für die statistische Beobachtung verschwindet das Individuum als solches, und es erscheint nur noch als eine Einheit in einer Zahl von gleichartigen Gliedern, die gewisse Merkmale gemein haben und von deren sonstigen individuellen Unterschieden abstrahirt wird.“

wir als Statistiker ebensowenig, wie von den complicirten Bewegungen eines rollenden Würfels, bei dem uns nur die Lage interessirt, in der er zur Ruhe kommt.“ (Lexis 1875, S. 94)

Ein Ausweg aus der Sackgasse soll also dadurch gefunden werden, daß man sich die statistischen Massenerscheinungen so vorstellt, als ob sie durch Zufallsgeneratoren hervorgebracht werden. In dieser allgemeinen Formulierung stammt die Idee zwar nicht von Lexis,[9] bemerkenswert ist jedoch, wie Lexis eine neue Rhetorik einführt, indem er versucht, die natürlichen und gesellschaftlichen Verhältnisse, unter denen Menschen leben, als Chancensysteme vorstellbar zu machen, und zwar so, daß es von der Beschaffenheit dieser Chancensysteme abhängt, wie sich die Lebensverläufe der Menschen entwickeln. Diese zunächst noch unbestimmte Vorstellung wird dann begrifflich dadurch fixiert, daß die Chancensysteme in Analogie zu Zufallsgeneratoren konzipiert werden, wie sie in der Wahrscheinlichkeitsrechnung behandelt werden.

2. In dem Beispiel, auf das sich Lexis bezieht (eine Sterbetafel), nimmt die Betrachtungsweise folgende Form an:

„Wir stellen L_a lebende a-jährige gleichsam ein Lebensjahr auf die Probe, indem wir jeden einer äusserst verwickelten Mannigfaltigkeit von lebensgefährdenden Ursachen oder Todeschancen aussetzen, und wir beobachten, wie viele in der gegebenen Altersstrecke von dem drohenden Schlage wirklich getroffen werden.“ (Lexis 1875, S. 94f.)

Bemerkenswert ist nicht nur die Idee eines fiktiven Experiments. Für unseren gegenwärtigen Gedankengang noch wichtiger ist die begriffliche Identifizierung von „lebensgefährlichen Ursachen“ mit „Todeschancen“. Es wird suggeriert, daß mit dem Chancenbegriff in ähnlicher Weise argumentiert

[9] Zum Beispiel betonte schon Laplace (1814/1932, S. 82) „die Vorteile der Wahrscheinlichkeitsanalyse beim Aufsuchen der Gesetze der Naturerscheinungen [...], deren Ursachen unbekannt oder zu kompliziert sind, um ihre Wirkungen der Berechnung unterwerfen zu lassen.“ Noch vor Quetelet hat auch bereits Laplace die Verwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in den „moralischen Wissenschaften“ propagiert. Das eben angeführte Zitat geht so weiter: „Das ist fast bei allen Gegenständen der moralischen Wissenschaften der Fall. So viele unvorhergesehene, oder verborgene, oder nicht abzuschätzende Ursachen beeinflussen die menschlichen Institutionen, daß es unmöglich ist, ihre Ergebnisse a priori zu beurteilen. Die Reihe der von der Zeit heraufgeführten Ereignisse bringt diese Resultate zur Entwickelung und zeigt die Mittel an, um die schädlichen unter ihnen abzuwenden. Man hat in dieser Hinsicht oft weise Gesetze gemacht; aber da man versäumt hat, die Beweggründe dafür aufzubewahren, so sind mehrere wieder als nutzlos abgeschafft worden, und es mußten erst unangenehme Erfahrungen das Bedürfnis ihrer Wiederherstellung aufs neue fühlen lassen. Es ist daher sehr wichtig, daß in jedem Zweige der öffentlichen Verwaltung ein genaues Register der Wirkungen geführt werde, welche die verschiedenen angewandten Mittel hervorgebracht haben, und welche eben so viele von den Regierungen im großen gemachten Erfahrungen sind. Wenden wir die auf Beobachtung und Berechnung gegründete Methode, die uns in den Naturwissenschaften so gute Dienste geleistet hat, nun auch auf die politischen und moralischen Wissenschaften an.“

werden kann wie mit einem Ursachenbegriff. Ob bzw. in welcher Weise das möglich ist, wird uns noch mehrfach beschäftigen. Hier soll zunächst betont werden, daß Lexis den Chancenbegriff gerade deshalb einführt, weil man mit statistischen Begriffsbildungen über Ursachen keine Aussagen machen kann.

3. Bemerkenswert ist weiterhin, daß vollständig offen bleibt, worauf sich der Chancenbegriff bezieht. Die einzige empirische Bezugnahme besteht in einem Verweis auf beobachtete Todesfälle. Aber was soll es heißen, daß sie sich gewissen „Todeschancen“ verdanken? Tatsächlich sind Lexis’ Chancensysteme zunächst nur Deutungschema für empirisch beobachtbare Erscheinungen. Das zeigt sich auch darin, wie Lexis glaubt, zu Aussagen über Chancensysteme kommen zu können. Er erläutert dies mit folgender Überlegung:

„Nehmen wir nun zunächst an, dass sich alle Individuen der betrachteten gleichalterigen Masse dem System der Todeschancen gegenüber *gleichartig* verhalten, so wird das Verhältnis der beobachteten Zahl der Todesfälle zu der Zahl der exponirten Lebenden ein Maass für die effective Wirksamkeit der Todeschancen werden, und zwar wird dieses Maass um so genauer, je grösser die Zahl der gleichartigen Lebenden ist, die dem Chancensystem gegenüber gestellt worden sind. Wäre diese Zahl unendlich gross, so würde jenes Verhältnis die genaue *Sterbenswahrscheinlichkeit* jedes einzelnen der exponirten gleichartigen Lebenden im $(a+1)$ten Altersjahr darstellen. Diese Sterbenswahrscheinlichkeit ist also der einzige Ausdruck, durch den wir das System der Todeschancen charakterisiren können, und wir betrachten das System als constant, so lange es dieselbe Sterbenswahrscheinlichkeit der Gleichartigen bedingt.

Auch wenn wir diese Sterbenswahrscheinlichkeit nicht genau bestimmen können – und die genaue Bestimmung würde ja unendlich viele Beobachtungen voraussetzen – so nehmen wir doch an, dass sie mit einem *bestimmten* Werth den Erscheinungen zu Grunde liegt.“ (Lexis 1875, S. 95)

Es ist ersichtlich, daß der Gedankengang zirkulär ist bzw. nur auf eine Deutung hinausläuft, für deren Berechtigung keine Begründung angegeben wird. Denn als empirische Tatsachen stehen nur jeweils beobachtete relative Häufigkeiten (für Sterbefälle) zur Verfügung. Daß diese relativen Häufigkeiten durch ihnen zugrundeliegende Wahrscheinlichkeiten – also durch Zufallsgeneratoren bzw. Chancen – *bestimmt* werden, ist eine nur äußerlich angehängte Deutung.

4. Man könnte vielleicht einwenden, daß es keines Beweises bedarf, daß dem beobachtbaren Geschehen überhaupt irgendwelche Ursachen zugrunde liegen? Dennoch liefert Lexis’ Ansatz nur ein Deutungsschema, denn über Ursachen werden explizit gar keine Aussagen (nicht einmal irgendwelche spezifischen Annahmen) gemacht. Damit beginnt ja der Lexis’sche Gedankengang: daß der Statistiker über Ursachen keine Aussagen machen kann (oder möchte), da ihn dies zwingen würde, sich mit einzelnen Fällen zu beschäftigen. Anstatt Aussagen über Ursachen zu machen, werden vielmehr fiktive Chancensysteme ausgedacht, die eine scheinbar vergleichbare argumentative Aufgabe übernehmen sollen. Zwar scheint auch Lexis zu bemerken, daß ein fiktives Chancensystem nicht stellvertretend Einsichten in Verursachungszusammenhänge vermitteln kann. Aber er geht darüber mit folgender kurzen Anmerkung hinweg:

„Mit dem Worte 'Chance' bezeichnen wir im Folgenden eine Bedingung, die sich von einer Ursache im eigentlichen Sinne dadurch unterscheidet, dass sie nicht mit Gewissheit, sondern nur mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit eine Wirkung von bestimmter Art hervorbringt." (Lexis 1875, S. 95)

Diese Bemerkung ignoriert jedoch das eigentliche Problem: daß die von Lexis konzipierten Chancensysteme nur als Deutungsschema für ein jeweils beobachtetes Geschehen existieren, eine rein begriffliche Existenz haben und in ihrem logischen Status vollständig vergleichbar sind mit den Verteilungsgesetzen, durch die Fechner empirische Häufigkeitsverteilungen als vermeintlich „gesetzmäßig bestimmte" gedeutet hat. Der Unterschied besteht nur darin, daß Lexis eine neue Rhetorik einführt, die es erlauben soll, von Chancen so ähnlich sprechen zu können, wie man in anderen Kontexten von Ursachen sprechen kann.

7.2.3 Aufgaben der Sozialstatistik

1. Es ist diese neue Rhetorik der „sozialen Chancensysteme", die den Leitfaden für Lexis' Konzeption einer probabilistischen Sozialstatistik liefert. Folgende Zusammenfassung macht das noch einmal sichtbar:

„Die unbekannte Verbindung zwischen dem Anfange und dem Endzustande der Elementarmasse, d. h. in unserem Beispiele zwischen der Zahl der im Ganzen beobachteten und der gestorbenen Individuen einer Elementargruppe in einer bestimmten Altersclasse denken wir uns also in der Form eines Chancensystems. Bleibt dasselbe in mehreren gleichartigen Beobachtungsreihen unverändert, so zeigt die Wahrscheinlichkeitsrechnung, dass auch die beobachteten Verhältnisse der Gestorbenen zu den Lebenden nur in gewissen, mit genügender Sicherheit bestimmbaren Grenzen von einander abweichen werden; und umgekehrt kann man, wenn zwei beobachtete Verhältnisse über gewisse angebbare Grenzen hinaus von einander abweichen, praktisch mit Gewissheit aussagen, dass sich das Chancensystem in beiden Reihen geändert hat.

Demnach fasst sich die Aufgabe der socialphysiologischen Statistik in Folgendem zusammen: sie hat möglichst individualisirte Elementarmassen zu bilden und durch Wahrscheinlichkeitsverhältnisse die Chancensysteme zu charakterisiren, welche die bedeutsamen Veränderungen derselben bedingen; sie hat ferner zu untersuchen, wiefern durch die Verschiedenheit der Unterscheidungsmerkmale der Elementarmassen Verschiedenheiten ihrer Chancensysteme entstehen, und endlich festzustellen, ob die einzelnen Chancensysteme im Laufe der Zeit annähernd constant bleiben oder sich in einer bestimmbaren Weise ändern." (Lexis 1875, S. 121)

In diesem Zitat werden auch die drei zentralen Aufgaben sichtbar, die Lexis für die Sozialstatistik formuliert:

a) Zunächst soll sie empirisch ermittelbare relative Häufigkeiten (für soziale Ereignisse und Sachverhalte) als Ausdruck zugrunde liegender Chancensysteme deuten, wodurch es möglich werden soll, einen Wahrscheinlichkeitsbegriff zu verwenden, um Chancensysteme zu charakterisieren.

b) Sodann soll sie sich bemühen, die Mitglieder einer „statistischen Masse" nach möglichst vielen Merkmalen zu differenzieren, um auf diese Weise möglichst „gleichartige Teilmassen" zu finden, denen jeweils ein spezifisches Chancensystem unterstellt werden kann.

c) Schließlich soll sie sich bemühen, etwas darüber herauszufinden, ob und wie sich die Chancensysteme im Zeitablauf verändern.

2. Bei Lexis stehen die ersten beiden Aufgaben im Dienst der dritten, an der er in erster Linie interessiert war. Im Vergleich zum seinerzeit verbreiteten Reden von „sozialen Gesetzmäßigkeiten" war seine Position eher vorsichtig:

„Anders aber bei den menschlichen Massenveränderungen, die wir uns auf einem Chancensysteme beruhend denken. Auch hier können wir im Allgemeinen beurtheilen, welche Momente die Grösse der Veränderung wesentlich mit bestimmen, aber wir erkennen zugleich unmittelbar und unzweifelhaft, dass viele dieser Momente, weil nicht durch physische, sondern durch menschlich-sociale Verhältnisse bedingt, ihrem Wesen nach veränderlich sind. Der Schluss von der beobachteten auf die zukünftige Constanz des Chancensystems wird daher unter Umständen ein höchst problematischer, und die erstere begründet keineswegs die Annahme einer eigentlichen Gesetzmässigkeit der betreffenden Massenänderungen im naturwissenschaftlichen Sinne." (Lexis 1875, S. 122f.)

Hier interessiert uns jedoch nicht das damals intensiv diskutierte Problem der zeitlichen Beständigkeit sozialstatistischer Häufigkeitsverteilungen, sondern die neue Rhetorik: Lexis' Vorschlag, die Sozialstatistik dadurch für Begriffsbildungen der Wahrscheinlichkeitstheorie anschlußfähig zu machen, daß gesellschaftliche Verhältnisse als Chancensysteme gedeutet werden. Zwar hat Lexis vorgeschlagen, beide Fragen aufeinander zu beziehen, z. B. in folgender Formulierung:

„Die statistischen Zahlenverhältnisse drücken also nicht die herrschende Norm, das Gesetz der Erscheinungen aus, sondern sie geben uns nur einen näheren, exacten Aufschluss über die wirkliche Constitution der Erscheinungen, nämlich über das Chancensystem, welches denselben zugrunde liegt; und wegen der überall erkennbaren und begreiflichen relativen Stabilität der Wahrscheinlichkeiten in den menschlichen Dingen dürfen wir annehmen, dass dieses Chancensystem sich nur langsam ändern, also auch wenigstens in der nächsten Zukunft noch ähnliche Zahlenverhältnisse hervorbringen wird." (Lexis 1875, S. 124)

Aber gleichgültig, wie es sich mit der zeitlichen Beständigkeit verhält, bemerkenswert – und fragwürdig – ist vor allem der theoretische Anspruch: daß man durch eine Deutung gesellschaftlicher Verhältnisse als Chancensysteme „Aufschluss über die wirkliche Constitution der Erscheinungen“ gewinnen kann.

3. Gerade wenn man Lexis’ Gedankengang ernst nimmt, wird fragwürdig, welcher Erkenntnisgewinn sich daraus ergeben könnte, daß man die sich historisch wandelnden Erscheinungen des gesellschaftlichen Lebens als Ausdruck fiktiver Chancensysteme deutet. Denn zunächst hat Lexis ja sehr deutlich betont, daß die Sozialstatistik keine Einsichten liefern kann, wodurch – durch welche Ursachen – soziale Sachverhalte und Ereignisse zustande kommen. Man denke exemplarisch an v. Bortkiewicz’ „Gesetz der kleinen Zahlen“ für die Selbstmorde von Kindern. Insofern wird aber auch der theoretische Anspruch, daß man etwas über „die wirkliche Constitution der Erscheinungen“ lernen könne, fragwürdig.

4. Aber diese Frage wird von Lexis nicht ernsthaft verfolgt, sondern durch eine metaphorische Parallelisierung von „Ursachen“ und „Chancen“ ausgeblendet. Stattdessen gerät eine andere Frage in den Mittelpunkt: wie man mit den Mitteln der Sozialstatistik zu einer immer differenzierteren Ermittlung von Chancensystemen kommen kann. Lexis erläutert den Gedankengang im Anschluß an das Beispiel, das bereits im vorangegangenen Abschnitt angeführt worden ist.

> „Wir haben oben angenommen, dass die exponirten Lebenden sich dem System der Todeschancen gegenüber gleichartig verhalten, d. h., dass alle Individuen a priori mit gleicher Leichtigkeit unter den Einfluss jeder tödtlich wirkenden Ursachencombination gerathen können.
>
> Unter dieser Voraussetzung müsste man nicht nur, wenn man die ganze Gesammtheit rein *zufällig* in Unterabtheilungen zerlegte, sondern auch bei einer planmässigen Gruppenbildung nach bestimmten Merkmalen für jede Unterabtheilung ungefähr denselben Näherungswerth der Sterbenswahrscheinlichkeit finden, und die Abweichungen dieser Näherungswerthe unter sich dürften gewisse theoretisch bestimmbare Grössen nicht übersteigen.
>
> Wenn man aber die a-jährige Bevölkerung eines Landes nach Körperconstitution, Lebensweise, ökonomischer Lage u.s.w. in Gruppen zerlegte, so unterliegt es keinem Zweifel, dass die einzelnen Gruppen erheblich von einander abweichende Sterbenswahrscheinlichkeiten aufweisen würden. Die Individuen sind also dem vorausgesetzten System der Todeschancen gegenüber *nicht* als sämmtlich gleichartig anzusehen, oder, was auf dasselbe hinausläuft, es ist eine unbekannte Anzahl von Gruppen vorauszusetzen, welche *verschiedenen* Systemen von Todeschancen unterworfen sind.“ (Lexis 1875, S. 96)

Hier deutet sich ein weiterer Gedanke an, der für die Entwicklung der probabilistischen Sozialstatistik von zentraler Bedeutung geworden ist: daß man versuchen kann, Menschen aufgrund beobachtbarer Merkmale (sei es der Menschen selbst, sei es der Situationen, in denen sie sich befinden)

in Gruppen einzuteilen und dann für jede dieser Gruppen ein spezifisches Chancensystem zu unterstellen. Der Gedanke liegt bereits der Konstruktion einer Sterbetafel zugrunde, die je nach dem Alter der Menschen unterschiedliche Sterbewahrscheinlichkeiten annimmt. Die Überlegung kann indessen fast beliebig fortgesetzt werden. Zum Beispiel kann man in jeder Altersgruppe zusätzlich zwischen Männern und Frauen unterscheiden und für sie unterschiedliche Sterbewahrscheinlichkeiten annehmen, und man kann weiterhin Menschen nach ihren Berufen unterscheiden usw.[10]

[10] So auch schon bei Laplace (1814/1932, S. 111): „So viele veränderliche Ursachen üben ihren Einfluß auf die Sterblichkeit aus, daß die Tabellen, die sie darstellen, nach Ort und Zeit sich ändern müssen. Die verschiedenen Lebensumstände bieten in dieser Hinsicht merkliche Unterschiede dar, die von den mit jedem Stande untrennbaren Beschwerden und Gefahren abhängen und welche bei den auf die Lebensdauer begründeten Rechnungen nicht außer Acht gelassen werden dürfen. Aber diese Unterschiede sind noch nicht genugsam beachtet worden. Eines Tages werden sie es sein; dann wird man wissen, welche Einbuße an Leben jeder Beruf fordert, und man wird aus diesen Kenntnissen Gewinn ziehen, um die Gefahren zu vermindern.“

Kapitel 8

Wahrscheinlichkeit als Deutungsschema

Die Ausführungen des vorangegangenen Kapitels sollten deutlich gemacht haben, wie in der Entwicklung der probabilistischen Sozialstatistik eine neue Rhetorik entstanden ist, in der der Wahrscheinlichkeitsbegriff zum Reden über „Chancen“ dient. Die Überlegungen von Lexis bilden allerdings nur einen Bestandteil einer längeren Geschichte, in der sich das Reden von quantifizierbaren Wahrscheinlichkeiten von seiner ursprünglichen Anbindung an eine Theorie der Zufallsgeneratoren zu einem Deutungsschema für relative Häufigkeiten entwickelt hat. Eine wichtige Rolle in diesem Prozeß haben auch zahlreiche Versuche gespielt, den Wahrscheinlichkeitsbegriff frequentistisch, d. h. durch einen Rückgriff auf relative Häufigkeiten zu definieren. Darauf soll in diesem Kapitel etwas genauer eingegangen werden. Zunächst knüpfen wir noch einmal an Lexis an, dann beschäftigen wir uns mit frequentistischen Begriffsdeutungen.

8.1 Wahrscheinlichkeiten und Häufigkeiten

1. Sicherlich kann man sagen, daß Lexis für das Problem, wie in der Sozialstatistik sinnvoll von Wahrscheinlichkeiten gesprochen werden kann, keine Lösung gefunden hat. Chancensysteme werden nur als Deutungsschema für empirisch realisierte Häufigkeitsverteilungen eingeführt, erfahren jedoch keine selbständige empirische Explikation. Sofern dieser Eindruck entstehen kann, beruht er nur auf einer irreführenden Äquivokation mit Handlungschancen. Daß es sich tatsächlich nur um ein Deutungsschema handelt, hat Lexis auch noch in späteren Arbeiten deutlich gemacht, z. B. in seinen „Abhandlungen zur Theorie der Bevölkerungs- und Moralstatistik“ (1903). In einer dieser Abhandlungen bespricht er zunächst den Begriff einer „Wahrscheinlichkeit a priori“ und bezieht sich dafür – wie in der Wahrscheinlichkeitsrechnung üblich – auf Zufallsgeneratoren (Glücksspiele). Dann gehen seine Ausführungen so weiter:

„Man kann nun auch umgekehrt die Hypothese aufstellen, dass ein Ereignis, das in einer grossen Zahl s von Versuchen p-mal aufgetreten ist, die Wahrscheinlichkeit p/s habe, dass also z. B., wenn bei 600 Zügen aus einer Urne (wobei die gezogene Kugel stets wieder in die Urne zurückzulegen war) 105 mal eine weisse und 495 mal eine schwarze Kugel gezogen worden ist, das Verhältnis der weissen zu den schwarzen Kugeln in der Urne ungefähr 105 : 495 betrage, oder 1 : 5, wenn man wüsste, dass überhaupt nur 6 Kugeln in der Urne seien. Man kann auch noch weiter gehen und solche Hypothesen aufstellen für Ereignisse, auf die das Bild eines Glücksspiels mit Würfeln oder Urnen gar nicht mehr angewandt werden

kann. Wenn überhaupt ein Ereignis unter gewissen festgesetzten Bedingungen p mal eingetreten ist, das, soviel wir die Sache beurteilen können, an jedem von s beobachteten Einzelfällen hätte vorkommen können, so nehmen wir hypothetisch an, dass m/s näherungsweise die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses darstelle. Ob diese Annahme richtig sei, ob sie überhaupt einen Sinn habe, kann erst durch die Untersuchung mehrerer gleichartiger Beobachtungsreihen entschieden werden. Durchaus irrig ist die Meinung, dass überhaupt jedes aus grossen Zahlen gebildete Verhältnis sich wie der Näherungswert einer festen Wahrscheinlichkeit verhalte und sich daher mit steigender Beobachtungszahl einem konstanten Werte nähere. Es ist vielmehr leicht möglich, dass bei fortschreitender Vergrösserung von s durch Hinzufügung neuer Beobachtungen das Verhältnis m/s fortschreitend grösser oder kleiner wird.“ (Lexis 1903, S. 44f.)[1]

Damit ist man indessen erneut bei den Überlegungen, die schon in Abschnitt 5.4 besprochen worden sind. Für die gedankliche Unterstellung eines Zufallsgenerators wird kein Grund angegeben. Es wird auch nicht versucht, diese Unterstellung durch Hinweise auf Eigenschaften der Prozesse, die die fraglichen Sachverhalte oder Ereignisse hervorbringen, sinnvoll erscheinen zu lassen. Anstelle dessen wird ein scheinbar empirisches Argument angeboten: daß die Deutung einer empirischen Häufigkeitsverteilung durch ein Verteilungsgesetz dadurch begründbar sei, daß bei einer zeitlichen Reihe vergleichbarer Häufigkeitsverteilungen nur Unterschiede auftreten, die als „zufällig“ gedeutet werden können. Das Argument verfehlt indessen die Fragestellung, wie schon in Abschnitt 5.4 ausgeführt worden ist.

2. Möglicherweise entgegen den Intentionen von Lexis liefert seine Überlegung eine scheinbare Begründung dafür, daß für jede beliebige empirische Häufigkeitsverteilung ein fiktives Verteilungsgesetz angenommen werden kann. Tatsächlich hat sich in der Statistik ein Sprachgebrauch entwickelt, der Wahrscheinlichkeiten im wesentlichen mit relativen Häufigkeiten identifiziert. Zum Beispiel heißt es in einem Buch zur theoretischen Statistik von H. Forcher (1913):

„Durch die intensiven statistischen Maßzahlen wird der Einfluß der einzelnen Ursachen auf die Erscheinungen gemessen. Die bekannteste intensive Maßzahl ist die *statistische Wahrscheinlichkeit*. Am schärfsten hat den Begriff meines Erachtens Blaschke in seinem tiefgründigen Werke: ‘Vorlesungen über mathematische Statistik’ herausgearbeitet, wenn er sagt: ‘Die statistische Wahrscheinlichkeit ist ein Bruch, in dessen Nenner die Anzahl der Individuen einer bestimmten Art (des Anfangszustandes), in dessen Zähler die Summe der daraus binnen der Zeiteinheit unter dem Einfluß der zu messenden Ursache hervorgegangenen Änderungen (des Endzustandes) sich befindet.’ Sie heißen intensive Maßzahlen, weil sie die Häufigkeit eines Zustandes oder einer Zustandsveränderung aufdecken.“ (Forcher 1913, S. 203)

[1] Offenbar wechselt Lexis innerhalb dieses Zitats seine Notation und schreibt in der zweiten Hälfte anstelle von p/s den Ausdruck m/s.

Hier deutet sich auch an, wie mit fiktiven Wahrscheinlichkeiten der Anschein einer kausalen Argumentation erweckt werden soll: Wahrscheinlichkeiten werden als Meßgrößen für unbekannte Ursachen hingestellt. Es handelt sich indessen nur um eine rhetorische Variante der Lexis'schen Ausdrucksweise, daß man Wahrscheinlichkeitsgrößen als Chancen und diese wiederum als dem Geschehen zugrundeliegende Ursachen auffassen könne.

3. Hier noch ein weiteres Beispiel aus dem „Grundriß der Statistik" von Franz Zizek (1921):

„Unter den Verhältniszahlen kommt eine besondere Bedeutung jenen zu, welche als Wahrscheinlichkeitsgrößen angesehen werden können. Eine statistische Wahrscheinlichkeitsgröße ist nach Lexis ein Bruch, dessen Zähler eine Anzahl beobachteter besonderer Fälle oder Elemente angibt, die aus der im Nenner angegebenen Anzahl beobachteter Fälle oder Elemente entweder hervorgegangen sind oder einen Teil dieses letzteren bilden. Die Sterbenswahrscheinlichkeit z. B. ist das Verhältnis der Gestorbenen einer bestimmten Altersklasse zur Gesamtheit der Lebenden, die die untere Grenze dieser Altersklasse erreicht haben und unter das betreffende Sterberisiko getreten sind; das Verhältnis der Zahl der Knabengeburten zu der Gesamtzahl der Geburten stellt die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt dar.

Die *Bedeutung* der Verhältniszahlen, welche in formaler Hinsicht als *Wahrscheinlichkeitsgrößen* (oder Funktionen von solchen) auftreten, besteht darin, daß sie die Behandlung mittelst verschiedener, der Wahrscheinlichkeitstheorie angehörenden Methoden zulassen, während diese Methoden auf Verhältniszahlen anderer Art nicht angewendet werden können. Die Wahrscheinlichkeitstheorie erblickt in Verhältniszahlen, die als Wahrscheinlichkeitsgrößen angesehen werden können, sozusagen empirische Näherungswerte von ihnen zugrunde liegenden theoretischen Wahrscheinlichkeiten, sie unternimmt es, die Zuverlässigkeit (Genauigkeit) solcher Wahrscheinlichkeitsgrößen zu berechnen, d. h. festzustellen, innerhalb welcher Grenzen die dem empirischen Werte zugrunde liegende theoretische Wahrscheinlichkeit mit gegebener Wahrscheinlichkeit liegen dürfte, die Differenz zwischen zwei empirischen Wahrscheinlichkeitsgrößen (z. B. der Sterbenswahrscheinlichkeit zweier Bezirke) wird nach der Richtung untersucht, ob sie noch mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit dem Zufalle zugeschrieben werden könne oder ob anzunehmen sei, daß den beiden empirischen Bestimmungen ungleiche theoretische Wahrscheinlichkeiten zugrunde liegen." (Zizek 1921, S. 131f.)

Die Ausführungen machen deutlich, daß der Wahrscheinlichkeitsbegriff nur noch als ein Deutungsschema für empirische Häufigkeiten verwendet wird; und auch nur deshalb, um Begriffsbildungen und Vorstellungen aus der Wahrscheinlichkeitstheorie übertragen zu können. Der Anspruch, daß das Deutungsschema zu einer Erklärung sozialer Sachverhalte führen soll, erscheint nur noch indirekt in Formulierungen wie „zugrunde liegen".

8.2 Frequentistische Begriffsdeutungen

Sowohl der epistemische als auch der aleatorische Wahrscheinlichkeitsbegriff implizieren eine wesentliche Differenz zwischen Wahrscheinlichkeiten und relativen Häufigkeiten, so daß ein Sprachgebrauch, durch den Häufigkeiten als „statistische Wahrscheinlichkeiten" bezeichnet werden, sinnlos bzw. falsch erscheint. Andererseits ist jedoch von vielen Autoren versucht worden, diesen irreführenden Sprachgebrauch durch frequentistische Deutungen des Wahrscheinlichkeitsbegriffs zu rechtfertigen. Da solche Begriffsdeutungen die Lehrbuchliteratur zur Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie immer noch dominieren, erscheint es sinnvoll, sie etwas ausführlicher zu besprechen.

8.2.1 Einleitende Bemerkungen

1. Der Leitgedanke frequentistischer Begriffsdeutungen besteht darin, zur Begründung eines quantitativen Wahrscheinlichkeitsbegriffs von relativen Häufigkeiten auszugehen. Erste Ansätz zur Entwicklung einer solchen Konzeption finden sich in Publikationen von R. L. Ellis (1849) und in der „Logic of Chance" von John Venn (1888, erste Ausgabe 1866). Eine wichtige Rolle spielte dann vor allem Richard von Mises, mit dessen Auffassungen wir uns im folgenden hauptsächlich beschäftigen.

2. Vor allem drei Motive für die Entwicklung und Verbreitung frequentistischer Auffassungen lassen sich feststellen. (a) Zunächst spielt sicherlich die Erfahrungstatsache eine Rolle, daß man sich in vielen Fällen von einem Zusammenhang zwischen aleatorischen Wahrscheinlichkeiten und relativen Häufigkeiten praktisch überzeugen kann; so kann sich der Gedanke aufdrängen, daß man diese Erfahrungstatsache auch für eine Definition des Wahrscheinlichkeitsbegriffs verwenden könne. (b) Ein zweites Motiv resultiert aus der Kritik des „Prinzips des unzureichenden Grundes", durch das die „klassische" Konzeption eines aleatorischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs zunehmend ersetzt und mit spekulativen Gedankengängen vermengt worden ist (vgl. Abschnitt 4.2.3). Wird stattdessen von beobachtbaren Häufigkeiten ausgegangen, erscheint es möglich, einen empirischen Ansatz zum Verständnis von Wahrscheinlichkeiten zu finden. (c) Damit hängt ein drittes Motiv zusammen, das sich auf Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung bezieht. Der „klassische" Ansatz, eine Grundlegung durch Zufallsgeneratoren herzustellen, schränkt mögliche Anwendungen auf Situationen, Ereignisse und Sachverhalte ein, die durch Zufallsgeneratoren zustande kommen. Das „Prinzip des unzureichenden Grundes" kann insofern auch unter dem Gesichtspunkt betrachtet werden, daß es den durch Zufallsgeneratoren eng umgrenzten Bereich möglicher sinnvoller Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung beliebig erweiterbar machen sollte; nämlich auf alle Gebiete, wo man sich „gleichermaßen unschlüssig" (Laplace) ist. Frequentistische Ansätze scheinen es demgegenüber zu erlauben, die Anwendungsmöglichkeiten der „klassischen“ Wahrscheinlichkeitsrechnung auf nicht-spekulative Weise auf alle Gebiete auszuweiten, in denen sich sinnvoll von „Massenerscheinungen“ und relativen Häufigkeiten sprechen läßt.

3. Alle drei Motive finden sich insbesondere bei R. v. Mises, der als wichtigster Vertreter einer frequentistischen Auffassung angesehen werden kann.[2] Seine Kritik an der „klassischen“ Konzeption des aleatorischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs, die er allerdings im wesentlichen mit der insbesondere von Laplace vertretenen Deutung durch das „Prinzip des unzureichenden Grundes“ gleichsetzt, wurde bereits in Abschnitt 4.2.3 erwähnt. In seiner „Wahrscheinlichkeitsrechnung“ (1931) knüpft v. Mises stattdessen an Poisson an:

> „Nach Laplace gab es noch einmal eine hervorragende originale Leistung in dem Werke von Siméon Denis Poisson (1781 – 1840), der u. a. eine wichtige Erweiterung des Bernoullischen Satzes fand. In der Einleitung seines Buches schildert Poisson in ausgezeichneter Weise die allgemeine Erfahrungsgrundlage, die den Ausgangspunkt aller wahrscheinlichkeitstheoretischen Untersuchungen bildet: ‘Erscheinungen verschiedenster Art sind einem allgemeinen Gesetz unterworfen, das man das Gesetz der großen Zahlen nennen kann. Es besteht darin, daß, wenn man sehr große Anzahlen von gleichartigen Ereignissen beobachtet, die von konstanten Ursachen und von solchen abhängen, die regelmäßig, nach der einen und anderen Richtung veränderlich sind, ohne daß ihre Veränderung in einem bestimmten Sinn fortschreitet, man zwischen diesen Zahlen Verhältnisse finden wird, die nahezu unveränderlich sind. Für jede Art von Erscheinungen haben diese Verhältnisse besondere Werte, denen sie sich um so mehr nähern, je größer die Reihe der beobachteten Erscheinungen ist, und die sie in aller Strenge erreichen würden, wenn es möglich wäre, die Reihe der Beobachtungen ins Unendliche auszudehnen.’“ (v. Mises 1931, S. 3)

Dieses „empirische Gesetz der großen Zahlen“ spielt in allen frequentistischen Ansätzen eine wichtige Rolle und wird auch in Teilen der heutigen Lehrbuchliteratur als eine Grundlage der Wahrscheinlichkeitsrechnung angesehen.

4. Gibt es ein solches „Gesetz“? Zwei Fragestellungen sollten unterschieden werden. Einerseits: Gibt es wenigstens einige Beispiele, bei denen sich die von Poisson intendierte Aussage als eine Erfahrungstatsache behaupten läßt? Daran könnten sich Überlegungen anschließen, wie der Sachverhalt in diesen Beispielen verstanden werden kann. Eine ganz andere Frage bezieht sich darauf, wie man die Arten von Ereignissen eingrenzen kann, bei denen die von Poisson behaupteten Erfahrungsgrundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung sinnvoll unterstellt werden können. Im weiteren geht es zunächst nur um die erste Frage.

[2] Richard v. Mises lebte 1883 – 1953. Informationen über seine Biographie und wissenschaftlichen Arbeiten finden sich bei Stadler (1990). Wir beziehen uns im weiteren hauptsächlich auf sein Lehrbuch zur Wahrscheinlichkeitsrechnung (1931) und die zweite Auflage seines Buches „Probability, Statistics and Truth“ (1957/1981). Diese zweite Auflage erschien zuerst 1957; die erste Auflage erschien in deutscher Sprache 1928. Weiterhin beziehen wir uns auch auf sein „Kleines Lehrbuch des Positivismus“, in dem sich ein Kapitel mit dem Wahrscheinlichkeitsbegriff beschäftigt. Das Buch erschien zuerst 1939 in deutscher Sprache, dann, zuerst 1951, in mehreren amerikanischen Ausgaben und 1990 erneut in einer deutschen Ausgabe.

5. Als Beispiele kann man natürlich an Zufallsgeneratoren denken. Auf solche Beispiele beruft sich auch v. Mises:

> „Jeder Knabe weiß, daß beim ‘Kopf-oder-Adler’-Spiel mit einer gewöhnlichen Münze, wenn es nur hinreichend lange fortgesetzt wird, ungefähr die Hälfte aller Würfe ‘Kopf’ ergibt (wofür wir das Zeichen ‘1’ setzen) und ungefähr die Hälfte ‘Adler’ (wofür wir das Zeichen ‘0’ wählen). Werden also n Würfe ausgeführt, so ist die Zahl n_1 der 1-Würfe annähernd $n/2$ oder die ‘relative Häufigkeit’ der 1-Würfe $n_1/n \sim 1/2$.“ (v. Mises 1931, S. 10)

Ist dies eine Erfahrungstatsache? Die Frage muß wohl bejaht werden; jedenfalls in dem Sinne, in dem wir überhaupt von Erfahrungstatsachen sprechen: daß man auf viele Beispiele hinweisen kann, anhand derer man sich überzeugen kann. — Dann aber stellt sich sogleich eine weitere Frage: Wie kann man über Erfahrungstatsachen dieser Art sinnvoll sprechen? Es sei betont, daß es bei dieser Frage nicht darum geht, Erklärungen zu finden, sondern um eine vorgängige, aber auch grundlegendere Frage: wie sich geeignete Begriffe finden lassen, um über Erfahrungstatsachen der angedeuteten Art sinnvoll sprechen zu können. Natürlich reicht dafür in gewisser Weise schon unsere Umgangssprache; aber ihre Ausdrucksmittel sind hier auf bemerkenswerte Weise ungenau. Etwa so wie in dem oben angeführten Zitat: die beobachtete relative Häufigkeit der 1-Würfe wird „ungefähr“ oder „annähernd“ 1/2 sein.

6. Es sollte betont werden, daß hier kein „Meßproblem“ vorliegt. Das Problem liegt offenbar nicht darin, daß man relative Häufigkeiten nicht genau ermitteln kann. Wenn man eine Münze 100 Mal wirft, kann man hinterher nicht nur ungefähr, sondern ganz genau sagen, wie oft eine der Seiten aufgetreten ist; Meßfehler könnten nur daraus resultieren, daß man sich verzählt oder nicht genau erkennen kann, was herausgekommen ist. Das Wort ‘ungefähr’ bezieht sich vielmehr darauf, daß man die relative Häufigkeit der 1-Würfe nicht genau, sondern nur ungefähr *voraussagen* kann.

7. Diese Überlegung macht nicht nur deutlich, was hier mit dem Wort ‘Erfahrungstatsache’ gemeint ist: daß man in einigen Fällen – unter gewissen Voraussetzungen – relative Häufigkeiten näherungsweise richtig voraussagen kann. Sie zeigt auch, worin das Begriffsbildungsproblem besteht. Es besteht nicht darin, Begriffe zum Reden über relative Häufigkeiten zu finden; dafür genügen vollständig die Begriffsbildungen einer Statistik, die nur mit Häufigkeiten argumentiert. Es besteht vielmehr (in diesem Beispiel) darin, sprachliche Ausdrucksformen zu entwickeln, mit deren Hilfe Voraussagen über relative Häufigkeiten formuliert und Begründungen reflektiert werden können. Aber auch diese Überlegung macht noch nicht vollständig klar, warum man einen Wahrscheinlichkeitsbegriff benötigt. Denn um Voraussagen *formulieren* zu können, muß man nur in der Lage sein, in geeigneter Weise darüber zu sprechen, was man voraussagen möchte. In unserem Beispiel genügt ein Verständnis des Begriffs 'relative Häufigkeit', um eine entsprechende Voraussage zu machen. Ein neues Problem, das auch neue Begriffsbildungen erfordert, beginnt erst mit der Überlegung, daß man solche Voraussagen *nicht mit Sicherheit* machen kann, sondern nur mit mehr oder weniger großer Wahrscheinlichkeit.

8. Soweit führt der Gedankengang jedoch nur dorthin zurück, wo in Kapitel 3 begonnen wurde: daß man einen Wahrscheinlichkeitsbegriff benötigt, um in der Form *epistemischer* Wahrscheinlichkeitsaussagen zum Ausdruck zu bringen, daß Hypothesen (Voraussagen) nicht sicher, sondern nur mehr oder weniger wahrscheinlich sind. Die Erfahrungstatsache, auf die sich Poisson und v. Mises berufen, hat jedoch zwei Aspekte. Wenn man sich auf das Münzwurfbeispiel bezieht, kann man folgende Formulierung verwenden, um die beiden Aspekte sichtbar zu machen: Wenn man die Münze 100 Mal wirft, kann man *ziemlich sicher* sein, daß die relative Häufigkeit von 1-Würfen *ungefähr* 1/2 beträgt. Die Formulierung 'ziemlich sicher' deutet an, daß es sich um eine epistemische Wahrscheinlichkeitsaussage handelt, die sich auf folgende Hypothese (Voraussage) bezieht: Wenn man die Münze 100 Mal wirft, ist die relative Häufigkeit von 1-Würfen *ungefähr* 1/2. Ein zweiter Aspekt kommt in der Verwendung des Wortes 'ungefähr' für die Formulierung der Voraussage zum Ausdruck. Warum wird hier dieses Wort überhaupt benötigt? Es liegt offenbar kein sprachliches Problem vor; denn man könnte die Voraussage auch so formulieren: die relative Häufigkeit von 1-Würfen wird *exakt* 1/2 betragen; und man könnte genau so gut jede andere Zahl zwischen 0 und 1 verwenden, um eine *exakte* Voraussage zu formulieren.[3] Das Problem besteht ersichtlich nicht darin, daß man keine exakten Voraussagen *formulieren* kann, sondern daß sich exakt formulierte Voraussagen fast immer als falsch herausstellen würden.

9. An diesem zweiten Aspekt setzt nun ein wichtiger Gedankengang der frequentistischen Wahrscheinlichkeitskonzeption an: daß man das „ungefähr" der relativen Häufigkeiten in empirisch realisierten Gesamtheiten als Abweichungen von hypothetisch konzipierbaren Größen auffassen könne, die sich den relativen Häufigkeiten als ihre Wahrscheinlichkeiten unterstellen lassen.

[3] Anstelle von 'exakt' könnte man auch das Wort 'genau' verwenden. In diesem Text ist jedoch mit 'genau' meistens nur sprachliche, nicht unbedingt numerische Genauigkeit gemeint; dagegen soll das Wort 'exakt' darauf verweisen, daß numerische Genauigkeit angestrebt wird.

10. Was gemeint ist, wird vielleicht durch folgende Ausführungen eines neueren Lehrbuchs von Gnedenko (1991, S. 22) etwas deutlicher:

> „Die Wahrscheinlichkeitstheorie [befaßt sich] nur mit Ereignissen, die eine sog. *statistische Stabilität* oder, anders gesagt, eine Stabilität der relativen Häufigkeiten aufweisen. Diese Bedingung müssen wir genau erläutern. Es möge eine Folge von Versuchen angestellt werden, bei denen ein Ereignis A auftreten oder auch nicht auftreten kann. Die Versuche sollen unter gleichbleibenden Umständen durchgeführt werden, und die Ergebnisse bestimmter Versuche sollen keinen Einfluß auf die Ergebnisse der anderen Versuche haben (man sagt, die Versuche sollen unabhängig sein). Es möge die Zahl μ angeben, wie oft das Ereignis A in n vorher bestimmten (z. B. in n aufeinanderfolgenden) Versuchen auftrat; dann wird das Verhältnis μ/n die *relative Häufigkeit* von A in den betreffenden Versuchen genannt; statistische Stabilität von A liegt vor, wenn μ/n für $n \gg 1$ in der Nähe einer Konstanten liegt und sich nur wenig ändert, wenn man weitere Versuchsserien der Länge n durchführt und die entsprechenden μ bestimmt."

Es sind diese „hypothetischen Konstanten", die der frequentistische Ansatz als Wahrscheinlichkeitsgrößen konzipieren möchte. Sie müssen natürlich von epistemischen Wahrscheinlichkeiten, die sich auf Hypothesen beziehen, unterschieden werden. Sie unterscheiden sich aber auch von aleatorischen Wahrscheinlichkeiten, die beim „klassischen" Ansatz als Eigenschaften von Zufallsgeneratoren expliziert werden. Um auf die hypothetischen Größen des frequentistischen Ansatzes Bezug zu nehmen, sprechen wir im folgenden von *frequentistischen* oder kurz *F-Wahrscheinlichkeiten.*[4]

11. Um sich den Gedankengang vorstellbar zu machen, kann man an gewöhnliche Größen denken, deren Werte sich durch Meßverfahren ermitteln lassen. Man kann zum Beispiel an Objekte denken, die ein Gewicht haben. Ihr Gewicht kann durch ein Meßverfahren ermittelt werden, aber nur „ungefähr", denn es treten Meßfehler auf, die man als Abweichungen von einer theoretisch konzipierten Größe auffassen kann. Wenn wir es richtig verstehen, liegt der frequentistischen Wahrscheinlichkeitskonzeption ein ganz analog konzipierter Gedankengang zugrunde: daß man sich die Abweichungen zwischen empirisch ermittelbaren relativen Häufigkeiten und theoretisch unterstellbaren F-Wahrscheinlichkeiten so vorstellen könne wie die Abweichungen zwischen Meßergebnissen und einer durch sie zu ermittelnden theoretischen Größe.[5] Aber auch wenn sich durch diese Analogie

[4] Einige Anhänger des frequentistischen Ansatzes glauben, daß auch epistemische Wahrscheinlichkeiten einer frequentistischen Deutung zugänglich sind. Insbesondere hat H. Reichenbach zu zeigen versucht, „daß die Häufigkeitsinterpretation der Wahrscheinlichkeit für alle Verwendungen des Wortes 'wahrscheinlich' durchgeführt werden kann." (Reichenbach 1949, S. xiii) Mit dieser sehr unplausiblen Auffassung werden wir uns jedoch im weiteren nicht näher beschäftigen.

[5] Zum Beispiel heißt es bei A. Rényi (1966, S. 24): „Im täglichen Leben wird oft ein subjektives Urteil bezüglich der Möglichkeiten eines zufälligen Ereignisses ausgesprochen. Die mathematische Theorie der Wahrscheinlichkeit bezieht sich aber nicht auf diese subjektiven Urteile, sondern auf die objektiven Wahrscheinlichkeiten. Diese objektiven

verstehen läßt, was vielleicht gemeint sein könnte, stellt sich natürlich die Frage, ob sich der Gedankengang für die Wahrscheinlichkeitstheorie eignet. Von Autoren, die sich bemüht haben, einen frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff zu begründen, ist zur Beantwortung dieser Frage die Idee entwickelt worden, daß man F-Wahrscheinlichkeiten als „Grenzwerte" relativer Häufigkeiten auffassen kann. Damit beschäftigen wir uns im nächsten Abschnitt.

8.2.2 Grenzwerte von Häufigkeiten?

1. Die Vorstellung, daß F-Wahrscheinlichkeiten als Grenzwerte relativer Häufigkeiten aufgefaßt werden können, kommt bereits in den Ausführungen von Poisson gut zum Ausdruck (man vgl. das zu Beginn des vorangegangenen Abschnitts angeführte Zitat). Ganz ähnlich heißt es bei J. Venn in seiner „Logic of Chance" (1888) folgendermaßen:

„What, for instance, is the meaning of the statement that two new-born children in three fail to attain the age of sixty-three? It certainly does not declare that in any given batch of, say, thirty, we shall find just twenty that fail: whatever might be the strict meaning of the words, this is not the import of the statement. It rather contemplates our examination of a large number, of a long succession of instances, and states that in such a succession we shall find a numerical proportion, not indeed fixed and accurate at first, but which tends in the long run to become so." (Venn 1888, S. 4)

Weitgehend ähnliche Formulierungen finden sich bis heute in vielen Lehrbüchern der Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung (z. B. bei Fahrmeir et al. 1999, S. 190).

2. Ein ausführlicher und durchdachter Versuch, F-Wahrscheinlichkeiten als Grenzwerte relativer Häufigkeiten zu konzipieren, findet sich in den Arbeiten von R. v. Mises. Als Ausgangspunkt dient ihm der Begriff eines „Kollektivs". Dieser Begriff ist zwar verwandt mit unserem Begriff eines Zufallsgenerators; es gibt jedoch einen gravierenden Unterschied. Wir haben Zufallsgeneratoren als *Verfahren* eingeführt, mit denen sich beliebig viele Situationen erzeugen lassen, die sich durch ihre Zugehörigkeit zu einer Reihe von Situationstypen charakterisieren lassen; die entscheidende

Wahrscheinlichkeiten können ebenso wie physikalische Größen 'gemessen' werden." Bei einem anderen Anhänger der frequentistischen Wahrscheinlichkeitsdeutung, H. Freudenthal (1963, S. 132f.), heißt es ganz ähnlich: „Insbesondere können wir versuchen, Wahrscheinlichkeiten zu messen, wie der Physiker Längen, Kräfte, Spannungen mißt. Meßinstrument ist das Ziehen einer Stichprobe." „Die Messung einer Wahrscheinlichkeit ist eine physikalische Messung und wie jede physikalische Messung mit einer Unsicherheit behaftet." Eine weitere sehr ähnliche Formulierung findet man auch bei F. Sixtl (1993, S. 241): „Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses kann man, falls sie existiert, auch messen: jede auf einem endlichen Stichprobenumfang basierende relative Häufigkeit p_n ist ein Meßwert der festen, aber unbekannten Wahrscheinlichkeit."

Voraussetzung besteht darin, daß man durch Einsichten in die Konstruktion des Zufallsgenerators eine Vorstellung von „gleichen Möglichkeiten" gewinnen kann. Dagegen gründet v. Mises seine Überlegungen nicht auf Eigenschaften eines Verfahrens, sondern auf Eigenschaften der mit Hilfe eines Verfahrens erzeugbaren Folgen von Situationen.

3. Den Unterschied kann man auch so beschreiben. Es sei irgendein Verfahren gegeben, mit dem sich der Reihe nach beliebig viele Situationen

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n, \omega_{n+1}, \ldots$$

erzeugen lassen. Der „klassische" Ansatz, dem wir in Kapitel 4 gefolgt sind, besteht darin, daß man sich auf Eigenschaften des Verfahrens beruft. Aleatorische Wahrscheinlichkeitsaussagen sind zunächst Aussagen *über* Zufallsgeneratoren, *nicht* über die durch sie erzeugbaren Situationen, insbesondere nicht über relative Häufigkeiten in Mengen solcher Situationen; eine Verknüpfung erfordert ergänzende epistemische Wahrscheinlichkeitsaussagen (vgl. Abschnitt 4.5.4). Dem Kollektivbegriff v. Mises' liegt dagegen die Vorstellung zugrunde, daß man sich die Gesamtheit der durch das Verfahren erzeugten Situationen als eine „unendliche Folge" vorstellen und Wahrscheinlichkeitsaussagen als Aussagen *über solche Folgen* konzipieren könne. Dementsprechend sagt v. Mises:

„Nach der neueren Auffassung der Wahrscheinlichkeitstheorie, wie ich sie in verschiedenen Schriften entwickelt habe, ist jeder Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine Aussage über eine unendliche Zeichen- oder Zahlenfolge bestimmter Art." (v. Mises 1933, S. 757)

4. Verfolgen wir den Gedankengang etwas genauer. In seinem Lehrbuch beginnt v. Mises mit folgender Bemerkung:

„In der rationellen Wahrscheinlichkeitsrechnung, mit der wir uns in diesem Buch ausschließlich befassen, handelt es sich stets um eine *Massenerscheinung* oder einen *Wiederholungsvorgang*, bestehend aus sehr vielen Einzelelementen; man kann auch sagen, um eine Folge von 'Beobachtungen', deren jedesmaliges Ergebnis oder Merkmal (Nummer des Loses, Farbe der Erbsenblüte) unser Interesse besitzt. Für eine derartige Folge werden wir später (unter genauerer Präzisierung) die Bezeichnung '*Kollektiv*' einführen. Beispiele sind: Die beliebig oft wiederholbare Ziehung eines Loses, die in großen Massen ausgeführte Züchtung von Erbsen, die wiederholt vorgenommene Messung einer bestimmten physischen Größe." (v. Mises 1931, S. 7)

Auch v. Mises' Kollektivbegriff setzt also einen wiederholbaren Vorgang voraus, durch den Situationen (Beobachtungen) erzeugt werden.[6] Aber

[6] v. Mises (1931, S. 9) betont: „Wir werden daher auch statt Element des Kollektivs den konkreten Ausdruck 'Beobachtung', statt Merkmal 'Beobachtungsergebnis' gebrauchen. [...] Wesentlich ist, daß der Einzelvorgang *in sich abgeschlossen* ist und sich nach einer *dauernd gleichbleibenden Vorschrift* vollzieht, die über die Bestimmung des Merkmals oder die eventuelle Ausscheidung des Versuches eindeutig verfügt." Wir werden später besprechen, bei welchen „Massenerscheinungen" dies angenommen werden kann.

der Begriff bezieht sich nicht auf den Vorgang (im Sinne eines Verfahrens), *sondern* auf die durch den Vorgang entstehenden Folgen von Situationen.[7] Dies wird allerdings durch den frequentistischen Ansatz erforderlich gemacht: man möchte von relativen Häufigkeiten *ausgehen*. Aber relative Häufigkeiten gibt es nur in endlichen Mengen von bereits realisierten Situationen oder Ereignissen.

5. Im weiteren möchten wir zeigen, daß die Schwierigkeiten der frequentistischen Auffassung im wesentlichen aus dieser „Verkehrung" des Ansatzes resultieren: daß nicht mit Eigenschaften eines Verfahrens, sondern mit Folgen *realisierter* Situationen begonnen wird. Und zwar gibt es hauptsächlich zwei Schwierigkeiten. Die erste Schwierigkeit, mit der wir uns in diesem Abschnitt beschäftigen, betrifft die Konzeption von Folgen realisierter Situationen als Gegenstand von Wahrscheinlichkeitsaussagen sowie die Definition der Wahrscheinlichkeit als Grenzwert relativer Häufigkeiten. Eine zweite Schwierigkeit betrifft die Definition „zufälliger Folgen" und ihre Abgrenzung von „gesetzmässigen Folgen". — Es gibt auch noch eine dritte Schwierigkeit, die darin besteht, daß man es bei statistischen Anwendungen meistens nicht mit Folgen, sondern mit irgendwie abgegrenzten Mengen (Gesamtheiten) von Situationen zu tun hat, die nicht ohne weiteres als Folgen aufgefaßt werden können. Bei v. Mises bleibt diese Schwierigkeit unsichtbar, weil er sich von vornherein auf Folgen bezieht, also – ohne es in jedem Fall explizit zu machen – auf ein Verfahren, durch das die Situationen, die die Elemente der Folge bilden, sequentiell entstehen oder erzeugt werden können. Wenn man es jedoch, wie insbesondere in der Sozialstatistik, mit beliebig zustande gekommenen Gesamtheiten zu tun hat, werden Begriffsbildungen, die eine Folge von Situationen voraussetzen, fragwürdig.[8]

6. Um F-Wahrscheinlichkeiten als Grenzwerte relativer Häufigkeiten zu definieren, knüpft v. Mises an das im vorangegangenen Abschnitt besprochene Münzwurf-Beispiel an und fährt dann folgendermaßen fort:

„Damit ist die *erste Forderung*, die wir an eine einfache Massenerscheinung (Alternative[9]) stellen müssen, wenn sie Gegenstand der Wahrscheinlichkeitsrechnung werden soll, gefunden: Es muß möglich sein, sich die Folge der Einzelerscheinungen oder Beobachtungen (Elemente) *unbeschränkt fortsetzbar zu denken, und es müssen die relativen Häufigkeiten* für das Auftreten der beiden Merkmale *bestimmte Grenzwerte besitzen*. Diese Grenzwerte sind es, die man als die (mathematischen) Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der beiden Merkmale anzusehen hat."

Aber kann man annehmen, und wenn ja, in welcher Weise kann man davon sprechen, daß es solche Grenzwerte überhaupt gibt? Denn auch v. Mises (1931, S. 11) bemerkt:

„Empirisch feststellen läßt sich natürlich nicht, ob ein Grenzwert existiert oder nicht, da man immer nur endlich viele Versuche machen kann. Die unendliche Reihe von Nullen und Einsern, die das Ergebnis eines ideellen Kollektivs darstellt, ist uns weder unmittelbar noch formelmäßig gegeben. Man kann daher auch nicht durch Ausführung einer Rechnung nachprüfen, ob die Forderung nach Existenz des Grenzwertes in einem bestimmten Fall erfüllt ist."

Das heißt jedoch, daß der Grenzwert in diesem Fall nicht auf eine konstruktive Weise definiert werden kann. Denn dies würde voraussetzen, daß man die Glieder einer Folge *durch ein induktives Verfahren* definieren kann. Damit ist gemeint, daß man zur Definition einer Folge

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n, \omega_{n+1}, \ldots$$

eine Regel benötigt, die festlegt, wie jedes Glied ω_n gebildet werden kann (möglicherweise in Abhängigkeit von den vorangegangenen Gliedern $\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$). Und zwar muß diese Regel unabhängig von ihrer Verwendung zur tatsächlichen Erzeugung von Gliedern der Folge definierbar sein; oder anders formuliert: Es muß möglich sein, die Regel „ein für allemal" festzulegen, also die Folge *durch die Regel zu definieren*.

7. Bezieht man sich auf die oben angegebene Folge (ω_i) und bezeichnet mit $h_n(\tilde{x})$ die relative Häufigkeit des Merkmals $\tilde{x}$ in den ersten n Gliedern der Folge, muß man für die Existenz eines Grenzwertes p in der üblichen mathematischen Notation folgendes zeigen:

$$\forall \epsilon > 0 \;\exists m \;\forall n \geq m : \;|\, h_n(\tilde{x}) - p \,| < \epsilon$$

Aber um das zeigen zu können, muß es möglich sein, sich auf eine Regel zu beziehen, nach der die Glieder der Folge zustande kommen. Man kann es auch so sagen: Wenn man *heute* zeigen will, daß eine Folge einen Grenzwert

[7] Man sollte indessen beachten, daß v. Mises' Formulierungen in diesem Punkt eine charakteristische Ambivalenz aufweisen. Zum Beispiel wird in dem oben angeführten Zitat von der „beliebig oft wiederholbaren Ziehung eines Loses" gesprochen, wohingegen sich jedoch der Kollektivbegriff nicht auf diesen Vorgang, sondern auf dessen realisierte Ergebnisse bezieht.

[8] In Reichenbachs Variante der frequentistischen Konzeption heißt es (1949, S. 136): „Daß sich die Wahrscheinlichkeitsaussage stets auf Folgen bezieht, haben wir in die logische Grundlegung unserer axiomatischen Wahrscheinlichkeitsrechnung aufgenommen; infolgedessen können wir auch Aussagen über die Ordnung dieser Folgen in der axiomatischen Wahrscheinlichkeitsrechnung machen." Wenn aber – wie in der Sozialstatistik – keine sinnvolle Ordnung unterstellt werden kann, benötigt man einen weiteren Argumentationsschritt, um Reichenbachs Vorschlag zu folgen: Man erfindet eine willkürliche Ordnung der Objekte und zeigt, daß die Ergebnisse der Theorie nicht von der Wahl dieser Ordnung abhängen. Andere Varianten des frequentistischen Ansatzes verschleiern das Problem, indem sie nicht von Folgen, sondern von beliebigen Gesamtheiten (Klassen) ausgehen. Eine solche Variante wurde z.B. von R. A. Fisher vertreten, vgl. Abschnitt 6.2.1.

[9] v. Mises bezieht sich hier auf Situationen, bei denen nur zwei Merkmalswerte, 0 und 1, unterschieden werden, wie in dem „Kopf-oder-Adler"-Spiel, das er als ein Beispiel verwendet.

hat, dann muß man auch heute schon über die gesamte Folge sprechen können. Dagegen kann der Begriff eines Grenzwertes in dieser Form nicht auf Folgen angewendet werden, deren Elemente sich in einem historischen Prozeß realisieren, der heute noch nicht abgeschlossen ist.

8. Ein Kollektiv kann jedoch nicht durch eine induktive Regel definiert werden, wie sie für den mathematischen Grenzwertbegriff erforderlich ist.[10] Und zwar sind hier zwei Überlegungen wichtig. Zunächst kann man an Folgen bereits realisierter Situationen denken. Solche Folgen sind jedoch stets endlich und man weiß nicht, wie sie weitergehen werden. Schon die Vorstellung, sich Folgen dieser Art als beliebig in die Zukunft hinein fortgesetzt zu denken, bereitet Schwierigkeiten. Aber auch wenn man zu einer solchen Vorstellung bereit wäre, könnte natürlich mit Hinweisen auf ein endliches Anfangsstück der Folge niemals eine Aussage über einen Grenzwert begründet werden. Wenn man gleichwohl einfach annimmt oder postuliert, daß es auch für die beliebig fortgesetzt gedachten Folgen einen Grenzwert relativer Häufigkeiten gibt, verwandelt sich die Überlegung in eine metaphysische Spekulation, die auf eine Negation historischer Prozesse hinausläuft. v. Mises unterstreicht selbst den spekulativen Charakter seiner Postulate. Über die Existenz zufälliger Folgen sagt er: „One has to remain satisfied with an abstract *logical existence* which only contains that one can operate without contradiction with the concepts defined.“ (1919, zitiert bei J. von Plato 1998, S. 185).

9. v. Mises hat sich deshalb in seinen theoretischen Überlegungen gar nicht auf reale Kollektive bezogen, sondern auf Verfahren, durch die Kollektive beliebiger Länge erzeugt werden können. Infolgedessen kann er sich jedenfalls gedanklich auf eine beliebig lange Folge von Situationen und mithin von relativen Häufigkeiten beziehen. Aber es wird dann erforderlich, diese Folgen genauer zu charakterisieren. Dafür gibt es zwei Möglichkeiten. Man kann bei Eigenschaften des Verfahrens ansetzen, mit dem die Elemente der Folgen erzeugt werden. Dies ist der „klassische“ Ansatz, dem wir mit unserer Konzeption von Zufallsgeneratoren gefolgt sind. Aber es ist offensichtlich, daß ein Zufallsgenerator keine induktive Definition für die Folge von Situationen liefert, die durch ihn erzeugt werden können; und mithin kann auch die Vorstellung eines Grenzwertes bei Folgen, die durch einen Zufallsgenerator erzeugt werden, nicht sinnvoll angewendet werden.[11] Eine zweite Möglichkeit besteht darin, das Verfahren durch Eigenschaften der Folgen zu charakterisieren, die durch das Verfahren erzeugt werden können. Diesen Weg schlägt v. Mises ein. Wie in Abschnitt 8.2.3 genauer diskutiert wird, versucht er, Kollektive als in spezifischer Weise „regellose“ Folgen zu definieren. Dann gerät man jedoch erneut in einen Konflikt mit der Annahme, daß es für die in den Folgen realisierten relativen Häufigkeiten einen bestimmten Grenzwert gibt. Denn der Versuch, eine Folge als „regellos“ zu definieren, impliziert, daß sie nicht durch ein induktives Verfahren definiert werden kann; und infolgedessen ist auch in diesem Fall die Vorstellung eines Grenzwerts im obigen Sinne nicht durchführbar.[12]

[10] Wir sprechen von einer *induktiven* Regel, um an das mathematische Prinzip der vollständigen Induktion zu erinnern, auf dem insbesondere auch die elementaren Beweise für Existenzaussagen über Grenzwerte beruhen.

[11] Ein Zufallsgenerator soll gerade garantieren, daß keine induktive Regel gefunden werden kann, mit der sein Verhalten vorausgesagt werden könnte. Eine andere Frage ist, ob Zufallsgeneratoren, die dieser Forderung genügen, praktisch hergestellt werden können. Bei allen in Verwendung befindlichen Zufallsgeneratoren wird man nicht ausschließen können, daß solche Regeln gefunden werden könnten. Aber das bedeutet nur, daß ein Verfahren nicht länger als ein Zufallsgenerator verwendbar wäre, sobald man eine Regel gefunden hätte, um seine Funktionsweise voraussagbar zu machen. Es ist klar, daß in diesem Sinne die Möglichkeit, Zufallsgeneratoren praktisch herstellen zu können, von dem jeweils verfügbaren Regelwissen abhängig ist.

10. Aber auch wenn es gelingen könnte, die Idee eines Grenzwertes von Häufigkeiten in einer „regellosen Folge“ durch ein mathematisches Konstruktionsverfahren zu definieren, wäre für das Anliegen des frequentistischen Ansatzes nicht viel gewonnen. Denn die eigentlich interessante, aber auch fragwürdige Behauptung betrifft ja nicht ein mathematisches Konstruktionsproblem, sondern die Konzeption eines empirisch verwendbaren Wahrscheinlichkeitsbegriffs. Die Frage ist, mit welcher Berechtigung bzw. unter welchen Bedingungen man empirisch ermittelbare relative Häufigkeiten als „Ausdruck“ oder „Manifestationen“ hypothetisch unterstellbarer „Konstanten“ (F-Wahrscheinlichkeiten) deuten kann.

11. Daß sich hinter dieser Deutungsabsicht ein Problem verbirgt, kann man sich anhand folgender Ausführungen von E. Nagel (1939, S. 19) verdeutlichen:

„The basic ideas of the frequency conception of probability emerge upon an examination of such a statement as ‘The probability that a person of thirty residing in the United States survives his thirty-first birthday is .945.’ The meaning of such a statement can be ascertained by examining how it is established. That procedure, greatly simplified, is somewhat as follows.

Suppose that during a period of years there is no migration to or from the United States, and that during these years exact counts are made of its inhabitants who fall into definite age groups. Thus, suppose that in 1900 there are 2,000,000 persons who have just reached their thirtieth birthday, and that exactly one year later there are 1,890,000 persons who have just reached their thirty-first birthday; that is, of the thirty-year-olds in 1900 a ratio of .9450 survive at least another year. We imagine that similar figures are obtained for the four succeeding years,

[12] Dazu bemerkte Jeffreys (1948, S. 55f): „There is a logical difficulty about whether the limit of a ratio in a random series has any meaning at all. In the infinite series considered in mathematics a law connecting the terms is always given, and the sum of any number of terms can be calculated by simply following rules stated at the start. If no such law is given, which is the essence of a random process, there is no means of calculation.“

and that the ratios of thirty-year-olds who survive their thirty-first birthday are .9452, .9456, .9451, and .9454, respectively.

We notice that, although these ratios are not constant, the differences do not appear until the fourth decimal is reached. We may say, therefore, that during these five years approximately 945 out of a thousand thirty-year-old residents of the United States live for at least another year; and we may make the further *assumption* that for an *indefinite number of future years* the corresponding ratios of survivals remain in the neighborhood of .945. Accordingly, the statement 'The probability that a thirty-year-old resident of the United States survives his thirty-first birthday is .945' means that in the long run the relative frequency with which thirty-year-olds in the United States survive for at least one year is approximately .945.“

Soweit es sich in diesen Ausführungen um empirische Aussagen handelt, wird offenbar ein Wahrscheinlichkeitsbegriff gar nicht benötigt, sondern man kommt vollständig mit relativen Häufigkeiten aus. Auch um die in vier Jahren beobachteten relativen Häufigkeiten als näherungsweise gleich oder als kleine Abweichungen von ihrem Durchschnittswert zu betrachten, ist ein Wahrscheinlichkeitsbegriff nicht erforderlich. Ein solcher Begriff wird hier von Nagel vielmehr nur deshalb verwendet, um eine metaphysische und in ihrer Begründbarkeit gar nicht reflektierte Hypothese einzuführen: daß es auch in aller Zukunft so bleiben wird, wie man in den vier Jahren beobachtet hat. Aber auch um diese Hypothese zu formulieren, benötigt man tatsächlich gar keinen Wahrscheinlichkeitsbegriff; denn man kann ja einfach sagen, daß man – aus welchen Gründen auch immer – daran glaubt, daß die in einer gewissen Zeitspanne beobachteten relativen Häufigkeiten sich auch in der Zukunft nicht oder nur wenig verändern werden.

12. Dieses Beispiel verdeutlicht ein grundsätzliches Problem, in das sich der frequentistische Ansatz verstrickt. Zunächst möchten seine Anhänger vorschlagen, daß man die *Bedeutung* von Wahrscheinlichkeitsaussagen dadurch verstehen kann, daß man sie in Aussagen über relative Häufigkeiten transformiert. Aber wenn bzw. insoweit dies gelingt, kann man über relative Häufigkeiten sprechen, und ein davon zu unterscheidender Wahrscheinlichkeitsbegriff wird ganz überflüssig. Insbesondere benötigt man für alle empirischen Aussagen der Sozialstatistik nur relative Häufigkeiten. Wenn dagegen gleichwohl an der Konzeption eines Wahrscheinlichkeitsbegriffs festgehalten werden soll, dient dies nicht der Explikation eines semantischen Problems – wie Wahrscheinlichkeitsaussagen *verstanden* werden können –, sondern es wird eine fragwürdige metaphysische Annahme eingeführt. Und zwar nicht so, daß man an diese Annahme glauben oder auch nicht glauben kann; sondern ein Bekenntnis zu dieser Annahme wird zu einer *Sinnvoraussetzung* für die Formulierung von Wahrscheinlichkeitsaussagen gemacht. Zwei Fragen werden also in einer wenig durchsichtigen Weise vermengt: wie man Wahrscheinlichkeitsaussagen verstehen und begründen kann; und ob man glauben soll, daß sich auf der Grundlage beobachtbarer relativer Häufigkeiten Gesetzmäßigkeiten für ihre Entwicklung in beliebig in die Zukunft fortsetzbaren historischen Prozessen formulieren und begründen lassen.[13]

8.2.3 Exkurs: Zufällige Folgen

1. Eine zweite Schwierigkeit für den frequentistischen Ansatz entsteht daraus, daß man sich auf relative Häufigkeiten in „zufälligen“ Folgen von Situationen (Sachverhalten, Ereignissen) beziehen möchte. Um die Schwierigkeiten zu verstehen, beginnen die folgenden Überlegungen mit einigen allgemeinen Bemerkungen zum Verständnis des Wortes 'zufällig'.

2. Das Wort 'zufällig' wird in unterschiedlichen Bedeutungen verwendet. Eine erste wichtige Unterscheidung ergibt sich daraus, ob man sich mit dem Wort auf den Entstehungszusammenhang oder auf die Beschaffenheit von etwas bezieht. Im ersten Fall kann man davon sprechen, daß etwas *zufällig entstanden* ist oder *sich zufällig ereignet* hat. Im zweiten Fall ist meistens gemeint, daß sich in der Beschaffenheit eines Sachverhalts *keine Regelmäßigkeiten* erkennen lassen.

3. In der Umgangssprache wird das Wort 'zufällig' oft dann verwendet, wenn für das Entstehen einer Situation (eines Ereignisses, eines Sachverhalts) keine erkennbaren Gründe vorliegen. Hieran hat auch bereits Aristoteles in seiner Physikvorlesung angeknüpft, wo es heißt:[14]

„Unter dem, was geschieht, erfolgen die einen (Ereignisse) *wegen irgendetwas*, die anderen nicht – von den ersten erfolgen die einen gemäß *vorsätzlicher Absicht*, die anderen nicht nach solcher Absicht, beide befinden sich aber unter den Ereignissen wegen etwas [...]. 'Wegen etwas' ist alles das, was sowohl durch planende Vernunft hervorgebracht sein könnte oder auch durch Naturanlage. Wenn Derartiges also nun *als nebenbei eintretende Wirkung* erfolgt, dann sagen wir, es sei 'aus Fügung'.“ (S. 75) „Ihr Unterschied liegt darin, daß 'Zufall' sich über einen weiteren Bereich erstreckt. Ereignisse auf Grund von Fügung sind alle auch zufällig; (umgekehrt) diese sind nicht alle auf Grund von Fügung.“ (S. 79) „Schicksalsfügung und (Ereignisse) auf Grund von Fügung können nur für solche (Wesen) zutreffen, für die auch 'Glückhaben' gelten kann, und überhaupt 'Handlung'. Also muß *Fügung* sich notwendig beziehen auf mögliche Handlungen. [...]

[13] Fragen der zweiten Art werden von Philosophen unter dem Namen „Induktionsproblem“ diskutiert. Dabei geht es darum, wie man Regelmäßigkeiten im Ablauf des Geschehens feststellen, formulieren und mit Hilfe von Beobachtungen und Experimenten begründen kann. Insofern kann man auch sagen, daß der frequentistische Ansatz Fragen, die sich auf das Verständnis und die Begründbarkeit von Wahrscheinlichkeitsaussagen richten, mit problematischen Annahmen zum Induktionsproblem vermischt. Reichenbach hat für seine Variante des frequentistischen Ansatzes einen expliziten Lösungsversuch unternommen; aber er bemerkt auch (1945, S. 512): „That the inductive inference is indispensable for the frequency theory and that it constitutes the most serious difficulty of this theory, is now generally recognized.“

[14] Wir zitieren nach einer Übersetzung von H. G. Zekl, vgl. Aristoteles (1987, S. 75ff.).

Der *Zufall* hingegen trifft auch auf Tiere und einen großen Teil des Unbelebten zu; z. B. 'das Pferd kam zufällig heraus' sagen wir dann, wenn es zwar durch sein Herauskommen einem Unglück entging, aber nicht herauskam in der Absicht, diesem Unglück zu entgehen. Und: 'Der Schemel fiel zufällig um'; er stand zwar da, um darauf zu sitzen, aber er ist nicht, um darauf zu sitzen, umgefallen! Es ist also klar: Wenn im Bereich der Geschehnisse, die im strengen Sinn wegen etwas eintreten und deren Ursache außer ihnen liegt, etwas geschieht, das mit dem Ergebnis nicht in eine Deswegen-Beziehung zu bringen ist, dann nennen wir das 'zufällig'. 'Auf Grund von Fügung' (sagen wir) von solchen Ereignissen, die im Bereich sinnvoll gewollter Handlungen bei (Wesen), die die Fähigkeit zu planendem Vorsatz haben, zufällig eintreten." (S. 79–81)

Diese Erläuterungen machen eine, auch in der heutigen Umgangssprache noch verständliche Bedeutung des Wortes 'zufällig' deutlich.

4. An diesen Sprachgebrauch knüpft auch der in dieser Arbeit verwendete Begriff eines Zufallsgenerators an. Ein Zufallsgenerator ist ein Verfahren, mit dem Situationen (eines gewissen Typs) erzeugt werden können; aber welche Situation jeweils erzeugt wird, ist nicht voraussagbar. Ein Zufallsgenerator ist gewissermaßen die Negation intentionalen Handelns. Man kann mit einem Zufallsgenerator nicht absichtlich bestimmte Situationen erzeugen. Es ist bestenfalls ein metaphorischer Sprachgebrauch, wenn man sagt, daß jemand sich vornehmen könnte, mit einem Würfel eine '6' zu erzielen. Der Begriff eines Zufallsgenerators schließt es aus, daß man üben und lernen könnte, mit ihm absichtlich bestimmte Resultate zu erzeugen.

5. Dieser Sprachgebrauch, daß etwas zufällig entsteht oder entstanden ist, impliziert in keiner Weise, daß „der Zufall" als eine besondere oder auch vielleicht nur unbekannte Art von Ursache aufzufassen sei. Das hat auch Aristoteles mit seinen Erläuterungen nicht gemeint. Wird davon gesprochen, daß etwas zufällig entstanden ist oder entsteht, hat dies weder im positiven noch im negativen Sinn Implikationen für die Frage, ob das Geschehen durch Ursachen vollständig oder teilweise oder gar nicht bestimmt wird. Es ist deshalb auch müßig, darüber zu spekulieren, ob die Situationen, die durch einen Zufallsgenerator erzeugt werden, durch ihn und seine Verwendung „determiniert" sind. Zufallsgeneratoren sind Artefakte, von Menschen ausgedachte und hergestellte Verfahren, um Situationen zufällig zu erzeugen. Und sie haben weiterhin den Zweck, (Denk-) Modelle zu verschaffen, um über das zufällige Entstehen von Situationen nachdenken zu können.[15] Wichtig ist, daß diese Verwendung impliziert, daß man über die Beschaffenheit des Prozesses, der die Situationen hervorbringt, keine „substantiellen" Aussagen machen kann bzw. möchte. Darauf beruht der

[15] Sie werden natürlich auch für Glücksspiele aller Art verwendet; und sie werden auch gelegentlich verwendet, um „faire" Entscheidungen zu erreichen. Beides hat eine lange Geschichte; zur Geschichte der Verwendung von Zufallsverfahren für Entscheidungen vgl. Bennett (1998, Kap. 2).

unter Statistikern verbreitete Glaube, daß man bei Anwendungen wahrscheinlichkeitstheoretischer Begriffsbildungen von der Natur der Prozesse, auf die man sich beziehen möchte, vollständig abstrahieren könne.

6. Wenn man sich auf Zufallsgeneratoren bezieht, gewinnt also das Wort 'zufällig' seine Bedeutung daraus, daß es auf einen Prozeß verweist, durch den etwas entstanden ist. Daß eine Situation zufällig ist, meint in diesem Fall, daß sie zufällig *entstanden* ist, daß sie durch einen Zufallsgenerator hervorgebracht worden ist; wobei letzteres zweierlei bedeuten kann: daß die Situation tatsächlich durch die Verwendung eines artifiziellen Zufallsgenerators hervorgebracht worden ist oder daß man sich den Prozeß, durch den die Situation entstanden ist, so vorstellen möchte, *als ob* sie durch einen Zufallsgenerator hervorgebracht worden ist.

7. Eine wesentlich andere Verwendung des Wortes 'zufällig' bezieht sich auf die Beschaffenheit realisierter Situationen. Man bezieht sich dann nicht darauf, wie eine Situation entstanden ist, sondern auf Aspekte ihrer Erscheinungsform. Um sich die Unterscheidung zu verdeutlichen, denke man an einen Zufallsgenerator, mit dem Nullen und Einsen erzeugt werden können. Betätigt man diesen Zufallsgenerator 12 Mal, können zum Beispiel folgende Sequenzen entstehen:

$$1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1$$
$$0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,1$$
$$1,0,0,1,1,1,0,1,0,1,1,0$$

Betrachtet man diese Sequenzen als Ergebnisse eines Zufallsgenerators, sind sie gleichermaßen zufällig hervorgebracht worden. Wenn der Zufallsgenerator so beschaffen ist, daß es für das Auftreten von Nullen und Einsen gleiche Möglichkeiten gibt, haben die drei Sequenzen (genauer formuliert: die ihnen entsprechenden Situationstypen) die gleiche aleatorische Wahrscheinlichkeit. Andererseits erscheinen die ersten beiden Sequenzen als sehr „regelmäßig", die letzte jedoch als „unregelmäßig". Also kann man die letzte Sequenz auch „zufällig" nennen, womit dann aber nicht gemeint ist, daß sie durch einen Zufallsgenerator erzeugt worden ist, sondern daß sie „unregelmäßig" beschaffen ist.

8. In der Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung sind einige Unklarheiten daraus entstanden, daß zwischen den beiden Weisen, von „zufällig" zu sprechen, nicht immer deutlich genug unterschieden worden ist. Dazu beigetragen haben auch die Versuche, einen quantitativen Wahrscheinlichkeitsbegriff durch eine „Idealisierung" relativer Häufigkeiten zu definieren. Ein scheinbares Paradox kann zur Verdeutlichung dienen. Zur Erläuterung beziehen wir uns auf den Zufallsgenerator, der zur Erzeugung der drei oben angeführten Sequenzen verwendet worden ist. Angenommen, man erzeugt mit diesem Zufallsgenerator eine vierte Sequenz. Nachdem man ihn 12 Mal verwendet hat, stellt man fest, daß jedesmal eine ‘0’ herausgekommen ist. Sollte man dann nicht erwarten, daß die Wahrscheinlichkeit, beim nächsten Mal eine ‘1’ zu erzielen, größer als 1/2 ist? Andererseits impliziert der Begriff eines Zufallsgenerators, daß die aleatorischen Wahrscheinlichkeiten, die durch ihn definiert werden, unabhängig davon sind, welche Ergebnisse in der Vergangenheit aufgetreten sind; also ganz gleichgültig, ob eine Sequenz mit 12 Nullen oder irgendeine andere Sequenz aufgetreten ist, die Wahrscheinlichkeit, daß bei der nächsten Anwendung eine ‘1’ herauskommt, ist 1/2.

9. Wie kann man dieses scheinbare Paradox verstehen?[16] Man muß sich überlegen, warum es plausibel erscheinen könnte, nach dem Auftreten von 12 Nullen zu erwarten, daß die Wahrscheinlichkeit, beim nächsten Mal eine ‘1’ zu erzielen, größer als 1/2 sein sollte. Es scheint so, daß dies durch ein frequentistisches Verständnis von Wahrscheinlichkeiten nahegelegt wird, jedenfalls, wenn man sich an die oft zur Erläuterung verwendete Formulierung hält, daß Wahrscheinlichkeit die zu erwartende relative Häufigkeit sei. Wenn also in unserem Beispiel die Wahrscheinlichkeiten für Nullen und Einsen jeweils 1/2 sind, sollte man hiernach erwarten, daß in einer Sequenz der Länge 12 ungefähr 6 Nullen und 6 Einsen vorkommen. Also sollte man doch erwarten, daß, wenn man schon 12 Nullen bekommen hat, danach eher Einsen auftreten werden? Aber diese Erwartung steht ersichtlich in einem Widerspruch zu unserem Wissen über die Beschaffenheit und Funktionsweise des Zufallsgenerators.[17] Der Denkfehler resultiert deshalb aus einem Mißverständnis des aleatorischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs; allerdings ein Mißverständnis, dem durch eine frequentistische Rhetorik Vorschub geleistet wird.

10. Das scheinbare Paradox zeigt auch erneut, wie wichtig es ist, daß man sich zur Begründung eines quantitativen Wahrscheinlichkeitsbegriffs auf Zufallsgeneratoren bezieht. Wüßte man in unserem Beispiel nicht, daß die Nullen und Einsen durch einen Zufallsgenerator erzeugt werden (oder erzeugt worden sind), gäbe es zunächst überhaupt keinen Grund für irgendeine Erwartung; oder genauer gesagt: Eine Erwartungsbildung könnte sich dann nicht auf Wahrscheinlichkeiten berufen; denn man kann sich natürlich immer irgendwelche Erwartungen bilden. Hat man z. B. beobachtet, daß 12 Mal eine ‘0’ entstanden ist, kann man erwarten, daß das nächste Mal wieder eine ‘0’ herauskommen wird; oder man kann glauben,

[16] Es wird auch als „gambler’s fallacy“ bezeichnet; eine instruktive Diskussion findet sich bei Robertson (1905, Letter VII).

[17] Dazu bemerkte bereits Bernoulli (1713/1999, S. 13): „Es ist also bei der Berechnung der zu erwartenden Gewinne nur auf die Spiele, welche noch gemacht werden müssen, Rücksicht zu nehmen, nicht auf die bereits gemachten. Denn für jedes einzelne folgende Spiel ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Glück diejenigen Spieler begünstigt, welche es bisher bevorzugt hat, nicht grösser als die, dass es diejenigen begünstigt, welche es bisher stiefmütterlich behandelt hat.“

daß der erzeugende Prozeß, über den man nichts weiß, zu Abwechslungen neigt, und deshalb erwarten, daß beim nächsten Mal eine andere Zahl erscheinen wird; oder wenn man sich ganz unschlüssig ist, kann man ein Orakel befragen. Aber nur, wenn man sich auf einen Zufallsgenerator beziehen kann, kann man zur Begründung von Erwartungen auf quantitative Wahrscheinlichkeiten verweisen (im Unterschied zu relativen Häufigkeiten, die durch kontextabhängige Beobachtungen einer Menge realisierter Situationen entstehen).[18]

11. v. Mises war sich dieses Problems durchaus bewußt, und er hat deshalb für seinen Begriff eines Kollektivs (im Sinne einer beliebig langen Folge von Beobachtungen) nicht nur gefordert, daß es einen „Grenzwert“ der relativen Häufigkeiten geben soll; er hat außerdem gefordert, daß die Folge der Beobachtungen „zufällig“ im Sinne von „regellos“ sein soll. Dadurch entsteht aber für den frequentistischen Ansatz ein weiteres schwieriges Problem. Denn wie bei der Besprechung dieses Ansatzes in Abschnitt 8.2.1 dargelegt worden ist, besteht der Grundgedanke darin, zur Definition eines Wahrscheinlichkeitsbegriffs nicht von Zufallsgeneratoren auszugehen, sondern von Folgen von Situationen (Ereignissen, Beobachtungen), die *irgendwie* entstanden sein können. Um zu klären, was es bedeuten könnte, daß es sich um zufällige Folgen handelt, kann sich deshalb der frequentistische Ansatz nicht auf Eigenschaften eines Zufallsgenerators berufen. Es kann also eine Folge von Situationen auch nicht deshalb als zufällig bezeichnet werden, weil sie zufällig (durch einen Zufallsgenerator) *entstanden* ist. Vielmehr muß der frequentistische Ansatz bei der zweiten der oben unterschiedenen Verwendungsweisen des Wortes ‘zufällig’ anknüpfen; d. h. es muß der Versuch unternommen werden, den Sinn des Wortes ‘zufällig’ durch Rückgriff auf Eigenschaften eines Kollektivs, einer Folge von *realisierten* oder als realisiert gedachten Situationen, zu explizieren.

12. Die Frage ist, ob man im Hinblick auf eine *gegebene* Folge von Situationen sagen kann, daß sie „zufällig beschaffen“ ist. Der Versuch, eine solche Charakterisierung zu begründen, kann sich also nicht auf Überlegungen berufen, die sich darauf beziehen, wie die Elemente der Folge zustande gekommen sind, sondern nur auf in der Folge realisierte Eigenschaften. Wie schwierig dies ist, zeigt sich daran, wie v. Mises nach einer Lösung gesucht hat. In seinem Lehrbuch (1931, S. 11f.) beginnt er mit folgendem Beispiel:

„Betrachten wir als Massenerscheinung die längs einer Eisenbahnlinie aufgestellten Kilometersteine und die dazwischen stehenden kleinen 100-Meter-Marken. Den ersteren wollen wir das Merkmal ‘1’, den letzteren ‘0’ zuweisen. Dann ist klar, daß, wenn wir nur lange genug an der Bahnlinie entlang fahren und die

[18] Bei v. Mises (1931, S. 4) heißt es in einer scheinbaren Analogie: „Erst muß ein ‘Kollektiv’ da sein, bevor von Wahrscheinlichkeiten gesprochen werden kann.“ Die Formulierung ist allerdings merkwürdig, denn würde man sie wörtlich nehmen, könnte man erst dann von Wahrscheinlichkeiten sprechen, wenn der unendliche Prozeß, der die Elemente eines Kollektivs erzeugt, abgeschlossen ist.

Nullen und Einser zählen, annähernd der zehnte Teil aller Steine das Beobachtungsergebnis 1 aufweisen wird, während 9/10 das Merkmal 0 besitzen. Es läßt sich sehr leicht ausrechnen, daß auf einer unbegrenzt fortlaufenden Bahnstrecke tatsächlich

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n_1}{n} = 0.1, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n_0}{n} = 0.9$$

gelten muß.
Der wesentliche Unterschied, der zwischen diesem Fall und den früher angeführten Beispielen [exemplarisch das 'Kopf-oder-Adler'-Spiel] von Massenerscheinungen besteht, kommt in folgender Überlegung zum Ausdruck: Wenn man beim Zählen nicht alle Steine, sondern beispielsweise *nur jeden zweiten* beachtet, so wird die relative Häufigkeit der großen Steine auf keinen Fall mehr annähernd 1/10 sein, sondern entweder 0 oder 1/5, je nachdem, ob man bei dem 1., 3., 5., 7., 9. der auf einen großen Stein folgenden kleinen Steine zu zählen anfängt, oder bei dem 2., 4., 6., 8. kleinen Stein bzw. bei einem großen Stein selbst. Wenn man aber 'Kopf-oder-Adler' spielt, so ändert sich, wie jedermann weiß, nichts an der Aussicht, Kopf zu werfen, dadurch, daß man etwa nur jeden zweiten Wurf beachtet. Es gehört zu den wesentlichsten Vorstellungen, die sich für uns mit dem Begriff des 'Zufalls' oder des Glücksspiels untrennbar verknüpfen, daß man seine Chancen nicht durch eine systematische Auswahl der Spiele beeinflussen kann. Hier kommt eben das zur Geltung, was in der Einleitung als das 'Prinzip der Unmöglichkeit eines Spielsystems' angedeutet wurde und was gemeint ist, wenn man den Zufall 'gesetzlos' oder 'unvereinbar mit irgendeinem Gesetz' nennt.“

Mit dieser Überlegung begründet v. Mises, daß ein Kollektiv, so wie er den Begriff verwenden möchte, nicht nur der Forderung genügen muß, daß es einen „Grenzwert“ relativer Häufigkeiten gibt, sondern daß es außerdem „gesetzlos“ sein muß. Es geht dann folgendermaßen weiter:

„Die Massenerscheinungen, die den Gegenstand der Wahrscheinlichkeitsrechnung bilden, müssen noch einer *zweiten Forderung* genügen, die wir vorläufig wie folgt formulieren: Wird aus der gesamten unendlich gedachten Folge der Elemente eine *unendliche Teilfolge* so gebildet, daß über die Zugehörigkeit eines Elementes zur Teilfolge *ohne Kenntnis seines Merkmals*, nur nach der Stellung, die dieses Element in der Gesamtfolge hat, entschieden wird, so *müssen auch innerhalb der Teilfolge die relativen Häufigkeiten* des Auftretens der beiden Merkmale *Grenzwerte besitzen*, und zwar *dieselben* wie in der Gesamtfolge.“

Hier stellt sich natürlich die Frage, wie dieser Gedankengang, der sich auf eine *unendliche* Folge bezieht, genauer gefaßt werden kann. Die Ausführungen v. Mises' gehen so weiter:

„Um dies näher zu präzisieren, führen wir den Begriff der *'Stellenauswahl'* oder 'Positionsauswahl' ein und geben dafür zunächst folgende zwei Beispiele: a) Irgendein arithmetisches Gesetz wird vorgegeben, etwa in der Form: Jede zehnte Beobachtung soll ausgewählt werden; oder: Jedes Spiel, dessen Nummer in der Spielfolge eine Primzahl ist, soll gelten usf. b) Beim 'rouge et noir' soll nur ein solches Spiel gelten, dessen vorvorhergehendes 'rot' ergeben hat; oder jedes, das auf eine ununterbrochene Serie von 4-mal 'schwarz' folgt. – Das Gemeinsame

an diesen Auswahlverfahren ist, wie schon vorausgeschickt, daß über die Zugehörigkeit eines Elements zu der ausgewählten Teilfolge *vor* der Feststellung seines Merkmals, also unabhängig davon, ob die Beobachtung '0' oder '1' ergibt, entschieden wird. Wir definieren daher den Begriff 'Stellenauswahl' wie folgt: Aus einer unendlichen Folge von Beobachtungen wird durch 'Stellenauswahl' eine Teilfolge gebildet, indem man eine Vorschrift angibt, durch die über die Zugehörigkeit oder Nichtzugehörigkeit der $n$ten Beobachtung ($n = 1, 2, \ldots$) zur Teilfolge unabhängig von dem Ergebnis dieser $n$ten Beobachtung und höchstens unter Benutzung der Kenntnisse der vorhergegangenen Beobachtungsergebnisse entschieden wird.“

Schließlich sei zur Verdeutlichung des Gedankengangs noch folgende zusammenfassende Bemerkung (S. 13f.) angeführt:

„Ganz allgemein muß es als charakteristische Eigenschaft aller Massenerscheinungen, mit denen man es in der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu tun hat, angesehen werden, daß die relativen Häufigkeiten sich durch eine Stellenauswahl nicht beeinflussen lassen. Man mag ein Auswahlgesetz wie immer vorschreiben: wenn man die Beobachtungen dann nur *lange genug fortsetzt*, wird sich immer zeigen, daß innerhalb der ausgewählten Teilfolge die gleichen relativen Häufigkeiten der beiden Ergebnisse bestehen. Auf Glücksspiele angewendet heißt dies, daß ein 'Spielsystem' nicht möglich ist. Wir nennen die hier auftretende, durch die Unmöglichkeit des Spielsystems charakterisierte, Art der Zuordnung zwischen den Merkmalen und den Ordnungsnummern der Elemente eine *'regellose'* oder *'zufallsartige'*. Für Erscheinungen oder Vorgänge, die – gehörig idealisiert – den beiden Forderungen nach Existenz des Grenzwertes und nach 'Regellosigkeit' der Zuordnung genügen, führen wir den Ausdruck *'Kollektiv'* ein, und speziell *einfachstes Kollektiv* oder *Alternative*, sobald nur von zwei Merkmalen '0' oder '1' die Rede ist.“

13. Man kann sich fragen: Gibt es Kollektive, die der Definition durch v. Mises genügen? In der Tat ist v. Mises' Begriff der Stellenauswahl so allgemein, daß er die Existenz von Kollektiven ausschließt. Eine Regel zur Stellenauswahl kann man sich als eine monotone Funktion $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ vorstellen, die die auszuwählenden Stellen angibt. Für ein Kollektiv mit nur zwei Merkmalswerten (0 und 1) und mit einer F-Wahrscheinlichkeit p ungleich 0 oder 1 für den Merkmalswert 1 muß es unendlich viele Stellen mit dem Wert 1 geben. Damit gibt es aber auch mindestens eine Funktion α, die nur die Stellen mit dem Wert 1 auswählen. Der Grenzwert der Häufigkeiten unter dieser Stellenauswahl ist dann gleich 1 und damit ungleich p. Wenn man allerdings den Begriff der Stellenauswahl einschränkt, dann kann man die Existenz von Kollektiven (im Sinne der klassischen Mathematik) beweisen.[19]

[19] Es sind verschiedene Vorschläge für die Einschränkung von Stellenauswahlen gemacht worden. Eine (mathematisch) einfache Möglichkeit ist, nur eine abzählbare Menge von Auswahlfunktionen α zuzulassen. Eine interessantere Version läßt nur effektiv berechenbare Auswahlfunktionen zu. Eine Darstellung findet sich bei P. Martin-Löf (1969). Eine

14. Die Frage der Existenz von Kollektiven muß jedoch von einer anderen unterschieden werden: Kann bei einer vorliegenden Menge von Situationen (Merkmalswerten) entschieden werden, ob sie als Teilmenge oder Teilfolge eines Kollektivs aufgefaßt werden kann? Denn diese Frage betrifft nicht die Begriffsbildungen, sondern Fragen ihrer Anwendbarkeit. Jede vorliegende Menge von Merkmalswerten ist endlich, und die Überlegungen, auf denen v. Mises' Kollektivbegriff beruht, können schon deshalb nicht angewendet werden. Hinzu kommt, daß eine Menge von Merkmalswerten im allgemeinen nicht als eine Folge aufgefaßt werden kann. Der Begriff eines Kollektivs setzt dagegen voraus, daß man von einer *Folge* sprechen kann; und dies setzt wiederum voraus – sobald man die Welt der Mathematik verläßt und sich auf Vorgänge in der Erfahrungswelt beziehen möchte –, daß man sich in irgendeiner Weise auf ein Verfahren beziehen kann, durch das Merkmalswerte (Beobachtungen) sequentiell zustande kommen oder nachträglich geordnet werden können.

8.2.4 Sinngrenzen für Anwendungen

1. Blicken wir kurz zurück. Die Grundidee des frequentistischen Ansatzes besteht in der Annahme, daß man empirisch ermittelbare relative Häufigkeiten so auffassen könne, daß sich in ihnen näherungsweise gewisse „Konstanten" (F-Wahrscheinlichkeiten) manifestieren; und daß diese „Konstanten" als Eigenschaften irgendwelcher, aber nicht explizit gemachter Prozesse gedeutet werden können, die die Situationen hervorbringen, auf die sich die relativen Häufigkeiten beziehen. Dies ist natürlich eine metaphysische Annahme, für die es eine Begründung geben sollte. Aber der Versuch, eine solche Begründung dadurch zu geben, daß man F-Wahrscheinlichkeiten als Grenzwerte relativer Häufigkeiten auffassen könne, gelingt nicht; und zwar weder im Sinne einer empirisch gemeinten Definition noch als eine theoretische Konstruktion.[20] Für die Annahme, daß empirisch ermittelbaren relativen Häufigkeiten gewisse „Konstanten" (F-Wahrscheinlichkeiten) zugrunde liegen, kann durch den frequentistischen Ansatz keine Begründung gefunden werden. Wenn überhaupt eine Begründung gefunden werden kann, muß man sich auf die Verfahren oder Prozesse beziehen, durch die die Situationen entstehen, aus denen die relativen Häufigkeiten ermittelt werden. Einen nachvollziehbaren Gedankengang liefert der „klassische" Ansatz bei Zufallsgeneratoren; die „Konstanten" können dann als Eigenschaften eines Zufallsgenerators verstanden werden.

2. Die Frage, ob empirisch ermittelbare relative Häufigkeiten als zufällige Abweichungen von ihnen voraussetzbaren „Konstanten" aufgefaßt werden können, hängt eng mit Fragen nach Voraussetzungen und Sinngrenzen für Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung zusammen. Folgt man dem „klassischen" Ansatz, stellt sich die Frage so: Unter welchen Bedingungen kann sinnvoll angenommen werden, daß Situationen (Ereignisse, Sachverhalte) durch einen Zufallsgenerator erzeugt werden? Genau dann, wenn dies der Fall ist, können Begriffsbildungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung verwendet werden. Sinnvolle Anwendungen gibt es infolgedessen jedenfalls dann, wenn man sich auf artifizielle Zufallsgeneratoren beziehen kann. Es bleibt nur die Frage, ob und unter welchen Bedingungen es auch sinnvoll sein könnte, sich nicht artifiziell erzeugte Phänomene in unserer Erfahrungswelt als durch fiktive Zufallsgeneratoren erzeugt vorzustellen, um Begriffsbildungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung anwendbar zu machen.

3. Folgt man der frequentistischen Auffassung, stellt sich die Frage jedoch anders, etwa so: Unter welchen Bedingungen können relative Häufigkeiten als zufällige Abweichungen von ihnen unterstellbaren F-Wahrscheinlichkeiten aufgefaßt werden? Dafür gibt es allerdings keine objektivierbaren Kriterien, wenn man – wie es die frequentistische Auffassung impliziert – eine explizite Bezugnahme auf Zufallsgeneratoren für nicht erforderlich hält. Übrig bleibt dann nur die Frage, ob man relative Häufigkeiten, die sich ja in allen möglichen endlichen Gesamtheiten feststellen lassen, als „Hinweise" oder „Ausdruck" von F-Wahrscheinlichkeiten *deuten* möchte. Begriffsbildungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung werden dann zu einem Deutungsschema für empirisch ermittelbare relative Häufigkeiten.[21]

---

lesenswerte Einführung ist P. J. Huber (1995). Details werden von V. A. Uspenskii, A. L. Semenov und A. Kh. Shen (1990) behandelt.

[20] Dazu heißt es bei Braithwaite (1955, S. 125): „... since a sequence of numbers can start with any finite set of terms and still tend to any limit whatsoever, not only is the limiting value of the class-ratio not determined by the class-ratio in any finite set of classes of reference, but – and this is more serious – a limiting value does not determine what will be the class-ratio in any finite class of reference. The former lack of connexion implies that the limiting value cannot be regarded as a logical construction out of class-ratios in observable classes; the latter lack of connexion implies that it cannot be regarded as a theoretical concept either, since no conclusion as to class-ratios in finite classes (which are all that are observable) can be drawn from it." Dies wird auch von einigen Anhängern frequentistischer Wahrscheinlichkeitskonzeptionen eingeräumt, z.B. von Kolmogorov (1963, S. 369): „The frequency concept based on the notion of *limiting frequency* as the number of trials increases to infinity, does not contribute anything to substantiate the applicability of the results of probability theory to real practical problems where we have always to deal with a finite number of trials." Kolmogorov entwickelt daher ein Anwendungspostulat, das den Zusammenhang zwischen Grenzwerten und Häufigkeiten pragmatisch festlegt. Weitere Überlegungen zur Kritik findet man u. a. bei Fry (1928, S. 88ff.) und Stegmüller (1973b, S. 32ff.).

[21] Wir verwenden absichtlich diese Formulierung, weil Anhänger einer frequentistischen Position, insbesondere auch v. Mises, mit dem Anspruch auftreten, einen „objektiven" Wahrscheinlichkeitsbegriff begründen zu können, mit dem sich Aussagen über „objektive Eigenschaften" unserer Erfahrungswelt machen lassen. Sie kritisieren dementsprechend „subjektivistische" Auffassungen, die von einem epistemischen Wahrscheinlichkeitsbegriff ausgehen. Tatsächlich begründet die frequentistische Auffassung jedoch keine Alternative, sondern macht die Annahme von F-Wahrscheinlichkeiten beliebig. Zur

4. Der frequentistische Versuch, F-Wahrscheinlichkeiten nicht durch eine Bezugnahme auf Zufallsgeneratoren einzuführen, sondern sich stattdessen auf Kollektive zu beziehen, macht noch eine weitere Sinnvoraussetzung der Wahrscheinlichkeitsrechnung unklar: daß F-Wahrscheinlichkeiten (genau wie aleatorische Wahrscheinlichkeiten) nur dann sinnvoll angenommen werden können, wenn man sich auf ein Verfahren (oder einen „Mechanismus“) beziehen kann, das beliebig viele Situationen des gleichen Typs *unter gleichen Bedingungen* erzeugen kann. Wie schon erwähnt worden ist, hat auch v. Mises diese Sinnvoraussetzung betont: „Wesentlich ist, daß der Einzelvorgang [...] sich nach einer *dauernd gleichbleibenden Vorschrift* vollzieht.“ (v. Mises 1931, S. 9) Diese Sinnvoraussetzung wird jedoch dadurch verwischt, daß sich die frequentistischen Begriffsbildungen schließlich nicht auf ein Erzeugungsverfahren für Situationen, sondern auf Kollektive als Mengen tatsächlich realisierter Situationen beziehen. Infolgedessen entsteht zunächst ein theoretisches Dilemma. Einerseits benötigt man Kollektive als Mengen *realisierter* Situationen, um sinnvoll von relativen Häufigkeiten sprechen zu können. Andererseits liefern die Situationen, aus denen ein Kollektiv besteht (in der Sprechweise v. Mises’ die „Beobachtungen“), keinerlei Aufschluß über das Verfahren oder den Prozeß, durch den sie zustande gekommen sind. Insbesondere weiß man nicht, ob sie nach einer „dauernd gleichbleibenden Vorschrift“ entstanden sind. Im „klassischen“ Ansatz wird dieses Problem dadurch gelöst, daß man die Begriffsbildungen auf das Verfahren bezieht, auf den Zufallsgenerator, durch den nach einer „dauernd gleichbleibenden Vorschrift“ Situationen entstehen oder erzeugt werden können. Wenn man stattdessen von Kollektiven ausgeht und darunter – wie in der Statistik – irgendwie zusammengefaßte Mengen von Situationen oder Objekten versteht, wird ganz unklar, wie festgestellt werden könnte, ob sie tatsächlich nach einer „dauernd gleichbleibenden Vorschrift“ zustande gekommen sind.

5. Dies Problem stellt sich insbesondere bei der Verwendung von Begriffen der Wahrscheinlichkeitsrechnung zur Deutung sozialstatistischer Daten. In einem Zitat, das schon angeführt worden ist, spricht v. Mises davon, daß sich Begriffsbildungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung sowohl auf „Massenerscheinungen“ als auch auf „Wiederholungsvorgänge“ beziehen können. Aber die „Massenerscheinungen“, die den Gegenstand der Sozialstatistik bilden, entstehen keineswegs nach einer „dauernd gleichbleibenden Vorschrift“, sondern ihre Entstehungsbedingungen unterliegen einem historischen Wandel. Dieses Problem stellt sich natürlich gleichermaßen, wenn man im Anschluß an den „klassischen“ Ansatz versucht, die Situationen, auf die sich sozialstatistische Daten beziehen, als durch Zufallsgeneratoren erzeugt aufzufassen. Dann wird jedoch sichtbar, daß hier wirklich ein Problem vorliegt. Man muß nicht nur einen *fiktiven* Zufallsgenerator explizit konstruieren, sondern auch begründen können, daß es Sinn machen könnte, ihn zum Verständnis oder zur Prognose realer Situationen zu verwenden. Das kann indessen nur insoweit gelingen, wie man sich tatsächlich auf Eigenschaften der Prozesse beziehen kann, durch die Situationen *in der sozialen Realität* entstehen; genau so wie auch die Begründung von Wahrscheinlichkeitsaussagen für artifizielle Zufallsgeneratoren nur insoweit gelingen kann, als man über Einsichten in deren Konstruktion verfügt. Der frequentistische Vorschlag, daß man sich F-Wahrscheinlichkeiten als „Grenzwerte“ oder „Idealisierungen“ empirisch ermittelbarer relativer Häufigkeiten *vorstellen* könne, macht dagegen weder das Problem sichtbar, noch liefert er Ansatzpunkte für eine Lösung.

Illustration sei auf folgende Ausführungen von Whittle (1992, S. 4) verwiesen: „Suppose one conducted two separate sampling surveys, measuring in each the cholesterol levels of n people, say. Then, if pains have been taken to sample representatively, the average cholesterol levels from the two samples will be found to agree very much more closely than would the cholesterol levels of two randomly chosen individuals. Furthermore, the larger n, the better the agreement. There is a feeling, then, that the sample average measures ‘something real’ and approaches this ‘something real’ as the sample size increases. This is, of course, the justification of opinion polls and market surveys. It is on this feature of empirical convergence that one founds probability theory; by postulating the existence of an idealized ‘long-run proportion’ (a *probability*) or ‘long-run average’ (an *expectation*).“

Kapitel 9

Variablen und Hypothesen

In diesem abschließenden Kapitel soll besprochen werden, wie Gedankengänge der probabilistischen Sozialstatistik in Teilen der neueren Methodenliteratur zur empirischen Sozialforschung zumeist in sehr unkritischer Weise eine Fortsetzung gefunden haben. Wie schon in den vorangegangenen Kapiteln konzentrieren wir uns auf einige elementare Fragen der Begriffsbildung und des theoretischen Ansatzes.

9.1 Einleitende Bemerkungen

1. Die Ausführungen der vorangegangenen Kapitel sollten deutlich gemacht haben, daß man probabilistische Sozialstatistik als eine spezifische Variante sozialwissenschaftlicher Theoriebildung verstehen kann. Dabei dient als Leitgedanke die Vorstellung, daß eine wesentliche Aufgabe sozialwissenschaftlicher Theoriebildung darin besteht, explizite Vorstellungen über das Zustandekommen und die Veränderung sozialer Sachverhalte zu entwickeln. Orientiert man sich an dieser Aufgabe, wird jedoch nicht nur sichtbar, in welcher Weise der probabilistischen Sozialstatistik ein theoretischer Anspruch unterstellt werden kann, es wird zugleich erkennbar, inwiefern ihr theoretischer Ansatz wesentliche Erkenntnisinteressen der Sozialforschung verfehlt. Denn der Grundgedanke, daß soziale Sachverhalte durch fiktive Zufallsgeneratoren zustande kommen, liefert zwar einen formal explizierbaren Begriffsrahmen und somit auch einen Ausgangspunkt für explizit formulierbare Modelle; andererseits impliziert er jedoch, daß die Frage nach der Beschaffenheit der Interaktionsprozesse, durch die soziale Sachverhalte tatsächlich entstehen und sich verändern, systematisch ausgeblendet wird.

2. Aber gibt es eine Alternative, die nicht nur darin besteht, der Sozialstatistik die – durchaus sinnvolle – Aufgabe zuzuweisen, mit Hilfe statistischer Daten zur Beschreibung gesellschaftlicher Verhältnisse und ihrer Entwicklung beizutragen? Die Frage verweist auf ein weitgehend ungelöstes Problem: wie man auf explizite und empirisch explizierbare Weise von sozialen Prozessen sprechen kann, durch die sozialstatistisch ermittelbare Sachverhalte entstehen und sich verändern. Es ist allerdings bemerkenswert, daß dieses Problem in der Methodenliteratur zur empirischen Sozialforschung fast nirgendwo thematisiert wird. Darin kommt zum Ausdruck, daß es zwei ganz unterschiedliche Ansichten über statistisch ermittelbare Sachverhalte gibt. Eine Ansicht knüpft an Vorstellungen über „Beziehungen zwischen Variablen“ an und sieht die Aufgabe darin, solche Beziehungen zu ermit-

teln und als „Gesetzmäßigkeiten“ oder „Regelmäßigkeiten“ zu interpretieren. Was gemeint ist, kommt gut in folgender Bemerkung von E. K. Scheuch und D. Rüschemeyer (1956, S. 348) zum Ausdruck, die bereits zu Beginn von Kap. 1 zitiert worden ist:

> „Abgesehen von einer dauernden Bindung an die empirische Kontrolle stellt sich die von der modernen Wissenschaftslehre ausgehende Soziologie zudem die Aufgabe, über die Beschreibung hinaus allgemeine Gesetze (das heißt Hypothesen über konstante Beziehungen zwischen Variablen) aufzustellen.“

3. Daß es sich um eine fragwürdige Auffassung handelt, zeigt sich indessen nicht nur darin, daß es bisher nicht gelungen ist, auch nur einen einzigen statistischen Sachverhalt (z. B. eine Regressionsfunktion) zu finden, der als ein „allgemeines Gesetz“ interpretiert werden könnte.[1] Tatsächlich geht auch die Praxis der empirischen Sozialforschung meistens von einer anderen Ansicht aus, und zwar selbst dort, wo sie sich rhetorisch der Vorstellung bedient, daß statistische Sachverhalte als „soziale Gesetzmäßigkeiten“ angesprochen werden können. Denn fast immer begnügt sie sich nicht damit, statistische Sachverhalte zu ermitteln, sondern ergänzt solche Feststellungen durch Überlegungen, die zu einer Erklärung der jeweils ermittelten Sachverhalte beitragen sollen. Faktisch werden also statistische Sachverhalte nicht als „Gesetzmäßigkeiten“ angesehen, sondern als historisch kontingente Sachverhalte, die selbst einer Erklärung bedürfen.[2] Dann stellt sich jedoch die Frage, *wie* solche Erklärungen ausgearbeitet werden können. Die bisherige Praxis ist insofern unbefriedigend, als sie meistens nur darin besteht, die ermittelten statistischen Sachverhalte durch eine nachträglich angehängte „Interpretation“ mehr oder weniger plausibel zu machen. Es ist jedoch noch sehr unklar, wie man stattdessen zu einer sozialwissenschaftlichen Theoriebildung gelangen könnte.[3] Dazu hat natürlich beigetragen, daß sich die Methodenliteratur zur empirischen Sozialforschung bisher hauptsächlich an Vorstellungen orientiert, durch die bereits die Fragestellung – wie man zu Erklärungen statistischer Sachverhalte gelangen kann – weitgehend aus dem Blick geraten ist.

4. Die in der Lehrbuchliteratur zur empirischen Sozialforschung dominierende theoretische Orientierung kommt am deutlichsten darin zum Aus-

[1] Dies wird gelegentlich auch von Lehrbüchern zur sozialwissenschaftlichen Methodenlehre eingeräumt, die ansonsten in ihrer Rhetorik der oben zitierten Auffassung folgen; man vgl. exemplarisch Schnell, Hill und Esser (1999, S. 57).

[2] Folgende Bemerkung von S. A. Stouffer (1934, S. 485) bringt dies zum Ausdruck: „It is repeating the obvious so say that, even if the sociologist has successfully estimated the probability of an observed relationship arising from a suitably defined population of possibilities, his task usually will not be ended. He seeks to supply a reasonable explanation of the relationship found, unless, as is seldom the case, the explanation is self-evident from the manner in which the problem was set up.“

[3] Zum gegenwärtigen Stand der Diskussion vgl. man z. B. Goldthorpe (2000) sowie die Beiträge in Hedström und Swedberg (1998).

druck, wie von „Hypothesen“ gesprochen wird. Zum Beispiel heißt es in dem Methodenlehrbuch von Schnell, Hill und Esser (1999, S. 51):

„Allgemein bezeichnet man diejenigen Aussagen als *‘Hypothesen’*, die einen Zusammenhang zwischen mindestens zwei Variablen postulieren. Unter einer *‘Variablen’* versteht man einen Namen (z. B. ‘Geschlecht’, ‘V1’, ‘Var 134’) für die Menge von Merkmalsausprägungen, die Objekten (z. B. Personen) zugeschrieben werden.“

Im wesentlichen identische Formulierungen findet man in zahlreichen anderen Büchern zur Methodenlehre.[4] Meistens werden derartige Vorstellungen über Hypothesen auch sogleich in einen gedanklichen Zusammenhang mit „Gesetzen“ oder „Gesetzmäßigkeiten“ gebracht. Ganz explizit heißt es wiederum bei Schnell, Hill und Esser (1999, S. 52):

„*‘Gesetze’* sind strukturell identisch mit Hypothesen. Man verwendet den Gesetzesbegriff jedoch vor allem dann, wenn sich die entsprechende Aussage bereits häufig an der Realität ‘bewährt’ hat.“

Fragwürdig ist eine solche Rhetorik jedoch nicht nur deshalb, weil bisher noch kein einziges „Gesetz“ dieser Art gefunden worden ist. Denn unklar ist bereits, *was* durch die korrespondierenden Hypothesen behauptet werden soll und worin ihr Geltungsanspruch besteht.

9.2 Überlegungen zur Begriffsbildung

Unklarheiten resultieren in erster Linie daraus, daß in irreführender Weise von Variablen gesprochen wird. Im wesentlichen gibt es drei unterschiedliche Begriffsbildungen: logische Variablen, statistische Variablen und Zufallsvariablen. Das Reden von Variablen in der Methodenliteratur entspricht jedoch keinem dieser drei Begriffe. Um herauszufinden, was gemeint sein könnte, wenn von „Beziehungen zwischen Variablen“ gesprochen wird, ist es deshalb erforderlich, zunächst Klarheit über die unterschiedlichen Variablenbegriffe zu gewinnen. Wir beginnen im folgenden Abschnitt mit Überlegungen zum statistischen Variablenbegriff und besprechen, wie er sich vom logischen Variablenbegriff unterscheidet. Im Anschluß wird erklärt, wie Begriffsbildungen der Sozialstatistik – zunächst ganz unabhängig von einer Unterstellung fiktiver Zufallsgeneratoren – an statistische Variablen anknüpfen, so daß schließlich verständlich werden kann, wie *in diesem Kontext* von „Beziehungen zwischen Variablen“ gesprochen werden kann.

[4] Man vgl. z. B. Kerlinger (1964, S. 20), Bortz und Döring (1995, S. 9) sowie Sirkin (1995, S. 5ff). Bei Diekmann (1995, S. 107) heißt es: „Im allgemeinen Sinn ist eine Hypothese eine Vermutung über einen bestehenden Sachverhalt. [...] Im Unterschied zu diesen Beispielen machen *nomologische* Hypothesen [...] Aussagen über *Merkmalszusammenhänge*. Mit ‘Hypothesen’ sind, wenn nicht ausdrücklich anders gesagt wird, ‘Zusammenhangshypothesen’ gemeint. Auch generell ist der Sprachgebrauch in sozialwissenschaftlichen Texten so, daß unter einer Hypothese (meistens) eine Aussage über einen Zusammenhang zwischen sozialen Merkmalen, d. h. eine Beziehung zwischen zwei (oder mehr) Variablen verstanden wird.“

9.2.1 Statistische und logische Variablen

1. Der statistische Variablenbegriff kann am besten anhand des folgenden Schemas erläutert werden:

$$X : \Omega \longrightarrow \tilde{\mathcal{X}}$$

Hierbei ist $\Omega := \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ eine definite Menge, deren Elemente (fiktive) Namen für die Objekte sind, auf die man sich zunächst gedanklich, schließlich jedoch mit einem empirischen Anspruch beziehen möchte. Weiterhin ist $\tilde{\mathcal{X}}$ ein Merkmalsraum, d. h. eine Menge von sich wechselseitig ausschließenden Eigenschaften, die man zur Charakterisierung der durch die Elemente von Ω bezeichneten Objekte verwenden möchte.[5] In symbolischer Schreibweise:

$$\tilde{\mathcal{X}} := \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots\}$$

Bei den Elementen handelt es sich wiederum um Namen, in diesem Fall für Eigenschaften, z. B. $\tilde{\mathcal{X}} := \{\text{‘männlich’}, \text{‘weiblich’}\}$. Schließlich ist die statistische Variable X eine Zuordnung, die jedem Objekt $\omega \in \Omega$ einen bestimmten Merkmalswert $X(\omega) \in \tilde{\mathcal{X}}$ zuordnet.

2. Im Anschluß an diese Definition läßt sich auch eine der Unklarheiten verstehen, die mit dem Reden von Variablen in der Methodenliteratur verbunden sind. Als Beispiel kann folgende Bemerkung von Schnell, Hill und Esser (1999, S. 124) dienen:

„Variablen können als zusammenfassender Begriff für verschiedene Ausprägungen einer Eigenschaft (den ‘Variablenwerten’) angesehen werden; z. B. die Variable ‘Ampelfarbe’ kann die Variablenwerte ‘rot, gelb, grün’ annehmen.“

Die Formulierung legt nahe, daß Variablen als Namen für Merkmalsräume verstanden werden können;[6] im Beispiel wird eine Variable ‘Ampelfarbe’ als ein Name für den Merkmalsraum $\tilde{\mathcal{X}} := \{\text{‘rot’}, \text{‘gelb’}, \text{‘grün’}\}$ eingeführt. Ein Merkmalsraum ist jedoch in keiner Weise als eine Variable interpretierbar. Insbesondere könnte man dann nicht davon sprechen, daß eine Variable unterschiedliche Werte annehmen kann. Wollte man das tun, müßte man zunächst ein unterschiedliches Symbol, z. B. X, einführen, um dann sagen zu können, daß die Variable X unterschiedliche Werte in einem Merkmalsraum $\tilde{\mathcal{X}}$ annehmen kann.

3. Aber selbst wenn man auf diese Weise eine begriffliche Unterscheidung zwischen einer Variablen (X) und einem Merkmalsraum ($\tilde{\mathcal{X}}$) eingeführt

[5] Verlangt wird nur eine formale Zurechenbarkeit, es kann sich z. B. auch um Eigenschaften von Situationen handeln, in denen sich Objekte befinden oder befunden haben.

[6] Ganz entsprechend heißt es bei Bortz und Döring (1995, S. 6): „Eine Variable ist ein Symbol für eine Menge von Merkmalsausprägungen.“

hat, können sich leicht irreführende Vorstellungen einschleichen, insbesondere durch die Formulierung, daß Variablen „unterschiedliche Werte annehmen“ können.[7] Denn gemeint ist tatsächlich etwas anderes: daß unterschiedliche Objekte unterschiedliche Eigenschaften haben können oder daß sich die Eigenschaften eines Objekts im Zeitablauf verändern können. In beiden Fällen kann man aber nicht davon sprechen, daß eine Variable ihre Werte ändert. Vielmehr ist eine Bezugnahme auf Objekte und ihre Eigenschaften erforderlich, und die grundlegende Idee besteht darin, daß man mit Hilfe von statistischen Variablen über Eigenschaften von Objekten und deren Unterschiede und Veränderungen sprechen kann. Um das zu erreichen, müssen jedoch statistische Variablen als Abbildungen bzw. Funktionen eingeführt werden, die Objekten Eigenschaften zuordnen. Dann wird auch deutlich, daß es sehr irreführend werden kann, Variablen als „veränderliche Größen“ aufzufassen. Denn wenn sich überhaupt irgendetwas verändert, dann jedenfalls nicht Variablen, sondern die Objekte, auf deren Eigenschaften man sich mit Hilfe von Variablen bezieht.[8]

4. Der Begriff einer statistischen Variablen muß indessen nicht nur von unklaren Redeweisen und Vorstellungen in der sozialwissenschaftlichen Me-

[7] Zum Beispiel heißt es bei A. L. Stinchcombe (1968, S. 28f): „A ‘variable’ in science is a *concept* which can have *various values*, and which is defined in such a way that *one can tell by means of observation which value it has in a particular occurrence*.“ Ähnlich sagt R. M. Sirkin (1995, S. 58), daß man in der Sozialforschung Begriffe als „Variablen“ bezeichnet, „because they vary, or change, from one observation to another.“ Die Vorstellung, daß infolgedessen die Begriffe variieren, ist natürlich unsinnig.

[8] Die Vorstellung, daß man Variablen als „veränderliche Größen“ auffassen könne, stammt aus der Frühzeit des Redens von Funktionen. Dazu heißt es bei B. Russell (1996, S. 90): „Originally, no doubt, the variable was conceived dynamically as something which changed with the lapse of time, or, as is said, as something which successively assumed all values of a certain class. This view cannot be too soon dismissed.“ Bereits vor Russell wurde das Reden von „veränderlichen Größen“ von G. Frege kritisiert. Eine besonders explizite Formulierung seiner Kritik findet sich in einer Schrift aus dem Jahr 1914 (Frege 1990, S. 142): „Vielfach scheint Unklarheit über das zu bestehen, was eine Funktion ist. Man benutzt dabei vielfach das Wort ‘Veränderliche’ oder ‘Variable’. Und es scheint danach zunächst so, als ob es zwei Arten von Zahlen gebe, die Konstanten oder gewöhnlichen Zahlen und die Variablen. Erstere, so scheint es, werden durch die bekannten Zahlzeichen bezeichnet, diese durch die Buchstaben ‘x’, ‘y’, ‘z’. Aber dies läßt sich mit der Verfahrungsweise der Analysis nicht in Einklang bringen. Wenn wir den Buchstaben ‘x’ in Verbindung mit anderen Zeichen haben, wie in ‘x - 2’, so verlangt die Analysis die Möglichkeit, für dieses ‘x’ verschiedene Zahlzeichen einzusetzen, wie in ‘3 - 2’, ‘4 - 2’, ‘5 - 2’ usw. Aber hierbei kann eigentlich von keiner Veränderung die Rede sein; denn wenn wir sagen, etwas verändere sich, so muß dieses sich Verändernde in der Veränderung als dasselbe erkannt werden können. Wenn ein Herrscher älter wird, so verändert er sich. Wir können das aber nur deshalb sagen, weil er trotz der Veränderung als derselbe wiedererkannt werden kann. Wenn dagegen ein Herrscher stirbt und sein Nachfolger den Thron besteigt, so kann man nicht sagen, daß jener sich in diesen verwandelt habe; denn der neue Herrscher ist eben nicht derselbe wie der alte. Mit diesem Falle ist es vergleichbar, wenn für ‘x’ in ‘x - a’ der Reihe nach ‘3’, ‘4’, ‘5’ eingesetzt werden. Es ist hier nicht dasselbe, was im Laufe der Zeit verschiedene Eigenschaften annimmt, sondern es sind ganz verschiedene Zahlen.“

thodenliteratur abgegrenzt werden, sondern auch von logischen Variablen, wie sie in der Logik und Mathematik verwendet werden. In diesem Kontext beziehen sich Variablen auf Leerstellen in Aussageformen. Zum Beispiel kann man eine Aussageform $P(x)$ betrachten, wobei das Zeichen P als Abkürzung für den Ausdruck ‘ist eine Primzahl’ steht. $P(x)$ ist somit eine Abkürzung für die Aussageform ‘x ist eine Primzahl’, in der die Variable x vorkommt. Man spricht von einer *Aussageform*, weil es sich nicht um eine bestimmte Aussage handelt. Erst wenn man anstelle der Variablen x den Namen für irgendein bestimmtes Objekt einsetzt, entsteht eine bestimmte Aussage, die wahr oder falsch sein kann. Setzt man z. B. an die Stelle von x den Namen einer Primzahl, entsteht eine wahre Aussage, andernfalls entsteht eine falsche Aussage. Und natürlich können auch sinnlose Aussagen entstehen, wenn man für x Namen von Objekten verwendet, die keine Zahlen sind.

5. Zur Unterscheidung sprechen wir einerseits von *statistischen*, andererseits von *logischen Variablen*.[9] Um die Unterscheidung genauer verständlich zu machen, beziehen wir uns auf eine statistische Variable

$$X : \Omega := \{\omega_1, \ldots, \omega_n\} \longrightarrow \tilde{\mathcal{X}} := \{\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m\}$$

Zunächst ist klar, daß weder die Elemente von Ω noch die Elemente von $\tilde{\mathcal{X}}$ logische Variablen sind, vielmehr handelt es sich um Namen, einerseits für Objekte und andererseits für Attribute, die den Objekten zurechenbar sind.[10] Ebenfalls ist klar, daß $X(\omega_i)$ weder eine Aussageform noch eine bestimmte Aussage ist, sondern der Name eines Attributs, und zwar der Name desjenigen Attributs (Elements von $\tilde{\mathcal{X}}$), das dem Objekt ω_i durch die statistische Variable X zugeordnet wird. Andererseits kann man aber jedes in $\tilde{\mathcal{X}}$ enthaltene Attribut zur Formulierung einer Aussageform verwenden, die ihrerseits eine logische Variable enthält, zum Beispiel: $\tilde{x}_1(\omega)$. Aus dieser Aussageform entstehen bestimmte Aussagen, indem man anstelle der logischen Variablen ω den Namen für irgendein bestimmtes Objekt einsetzt.

[9] Natürlich können die Attribute weggelassen werden, wenn der Kontext klar macht, was gemeint ist.

[10] Diese Unterscheidung zwischen einerseits Namen und andererseits logischen Variablen war ein wesentlicher Ausgangspunkt für die Entwicklung der modernen Logik. Sie findet sich ganz explizit bereits in G. Freges „Begriffsschrift“ (1879, S. 1): „Die in der allgemeinen Grössenlehre gebräuchlichen Zeichen zerfallen in zwei Arten. Die erstere umfasst die Buchstaben, von denen jeder entweder eine unbestimmt gelassene Zahl oder eine unbestimmt gelassene Funktion vertritt. Diese Unbestimmtheit macht es möglich, die Buchstaben zum Ausdrucke der Allgemeingiltigkeit von Sätzen zu verwenden wie in $(a+b)\,c = ac+bc$. Die andere Art umfasst solche Zeichen wie $+$, $-$, $\surd$, 0, 1, 2, von denen jedes seine eigenthümliche Bedeutung hat. Diesen Grundgedanken der Unterscheidung zweier Arten von Zeichen, der in der Grössenlehre leider nicht rein durchgeführt ist, nehme ich auf, um ihn für das umfassendere Gebiet des reinen Denkens überhaupt nutzbar zu machen. Alle Zeichen, die ich anwende, theile ich daher ein in solche, unter denen man sich Verschiedenes vorstellen kann, und in solche, die einen ganz bestimmten Sinn haben.“

Zum Beispiel kann man anstelle von ω die in Ω zusammengefaßten Namen für Objekte einsetzen und erhält dann die Aussagen $\tilde{x}_1(\omega_1), \ldots, \tilde{x}_1(\omega_n)$. Diese Aussagen sind wahr oder falsch je nachdem, ob den Objekten das Attribut $\tilde{x}_1$ zukommt oder nicht zukommt. Somit ist auch klar, wie man von einer statistischen Variablen zu richtigen Aussagen kommt, denn jedem Objekt ω_i kommt offenbar das Attribut $X(\omega_i)$ zu.[11] Die statistische Variable X impliziert infolgedessen die Aussagen

$$(X(\omega_1))(\omega_1), \ldots, (X(\omega_n))(\omega_n)$$

Und umgekehrt kann eine Menge derartiger Aussagen auch durch eine statistische Variable ausgedrückt werden.

6. Man kann einen wichtigen Unterschied zwischen statistischen und logischen Variablen auch folgendermaßen ausdrücken: Statistische Variablen beziehen sich stets auf eine definite Menge von Objekten (Ω), denen durch die Variable jeweils bestimmte Eigenschaften (Elemente von $\tilde{\mathcal{X}}$) zugeordnet werden. Dagegen wird bei logischen Variablen der Bezug auf Objekte offen gelassen. Es handelt sich um Leerstellen in Aussageformen, an deren Stelle Namen für ganz beliebige Objekte eingesetzt werden können (wodurch dann richtige oder falsche oder sinnlose Aussagen entstehen). Soweit es sich nur um den Begriff einer logischen Variablen handelt, ist es nicht einmal erforderlich, den Bereich der Namen, der an ihrer Stelle in eine Aussageform eingesetzt werden kann, explizit anzugeben.[12] Die explizite Angabe eines Objektbereichs (Wertebereichs) für logische Variablen wird erst erforderlich, wenn man mit Hilfe der Aussageformen (durch die logische Variablen definiert sind) zu All-Aussagen gelangen möchte, also zu Aussagen der Form

$$\forall\, \omega \in \Omega :\ P(\omega)$$

[11] Dies folgt aus der *Annahme* einer statistischen Variablen. Natürlich kann man in Frage stellen, ob eine solche Annahme richtig ist, weil es ja durchaus sein könnte, daß bei der Datenerhebung Fehler gemacht worden sind.

[12] Zum Beispiel heißt es im ersten Teil der von B. Russell gemeinsam mit A. N. Whitehead verfaßten „Principia Mathematica“ (1910) folgendermaßen (wir zitieren die folgende Passage in einer deutschen Übersetzung von J. M. Bocheński 1996, S. 379f): „Der Begriff (*idea*) der Variable, wie er in diesem Werke vorkommt, ist allgemeiner (*more general*) als jener, welcher in der gewöhnlichen Mathematik ausdrücklich gebraucht wird. In der gewöhnlichen Mathematik steht eine Variable im allgemeinen für eine unbestimmte Zahl oder Größe (*quantity*). In der mathematischen Logik (hingegen) wird jedes Symbol, dessen Bedeutung nicht bestimmt ist, eine *Variable* genannt, und die verschiedenen Bestimmungen, die ihre Bedeutung aufnehmen kann (*of which its meaning is susceptible*), heißen die *Werte* der Variable. Die Werte können jede Menge von Seienden (*entities*), Aussagen (*propositions*), Funktionen, Klassen oder Relationen sein, entsprechend den Umständen. Macht man eine Aussage (*statement*) über ‘Herrn A und Herrn B’, (so) sind ‘Herr A’ und ‘Herr B’ Variablen, deren Werte auf Menschen beschränkt sind. Eine Variable kann entweder einen konventionell bestimmten Wertebereich haben, oder kann [wenn keine Angabe des Wertebereichs vorhanden ist] als Bereich ihrer Werte alle Bestimmungen haben, welche die Aussage (*statement*), in welcher sie vorkommt, sinnvoll (*significant*) machen.“

wobei das Zeichen ‘$\forall$’ als ‘für alle’ zu lesen ist. In diesem Kontext wird die Aussageform $P(\omega)$ verwendet, um eine Aussage über alle Objekte auszudrücken, für die es einen Namen in Ω gibt; und eine solche All-Aussage ist genau dann wahr, wenn für jede beliebige Wahl eines Namens $\omega \in \Omega$ die resultierende Aussage $P(\omega)$ wahr ist. Erst wenn man von Aussageformen zu All-Aussagen übergeht, wird also eine Bezugnahme auf jeweils bestimmte Mengen von Objekten erforderlich.

7. Dann entsteht natürlich die Frage, für welche Objektmengen sich All-Aussagen sinnvoll behaupten und begründen lassen. Das wiederum hängt davon ab, ob man sich, wie in der Mathematik, auf gedanklich konstruierte Objekte oder, wie in der empirischen Sozialforschung, auf in unserer Erfahrungswelt identifizierbare Objekte beziehen möchte. Für die empirische Sozialforschung liefert gerade die Idee einer statistischen Variablen einen sinnvollen Ausgangspunkt. Bezieht man sich nämlich auf eine statistische Variable X, wie sie oben eingeführt worden ist, ist ihre Annahme äquivalent zur Annahme der All-Aussage

$$\forall\, \omega \in \Omega :\ (X(\omega))(\omega)$$

Aus dieser Formulierung wird auch deutlich, was getan werden muß, um die Annahme einer statistischen Variablen zu begründen. Man muß empirisch ermitteln, welche Merkmalswerte den Objekten in Ω zukommen; und nur soweit man einen solchen Prozeß der Datenermittlung praktisch durchgeführt hat, kann mit statistischen Variablen begründet argumentiert werden.

8. Schließlich kann man sich überlegen, daß das Reden von Variablen in der Methodenliteratur auch nicht durch den Begriff einer logischen Variablen expliziert werden kann. Denn ein Merkmalsraum, also eine Menge von Attributen, ist natürlich keine logische Variable. Zwar kann man einen Merkmalsraum, etwa $\tilde{\mathcal{X}} := \{\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m\}$, verwenden, um Aussageformen $\tilde{x}_1(\omega), \ldots, \tilde{x}_m(\omega)$ zu bilden, wodurch eine logische Variable ω eingeführt wird. Aber auf logische Variablen, die auf diese Weise eingeführt werden könnten, wird gar kein Bezug genommen. Vielmehr wird eine Rhetorik verwendet, die die Vorstellung nahelegt, daß die Elemente des Merkmalsraums „variieren“ können; z. B. wenn davon gesprochen wird, daß eine „Variable“ unterschiedliche Merkmalswerte in einem Merkmalsraum annehmen kann. Die Unklarheit besteht im wesentlichen darin, daß vollständig offen bleibt, auf welche Objekte man sich mit dem Reden von Variablen beziehen möchte. Das hat sicherlich zur Verbreitung einer „Variablensoziologie“ beigetragen, in der nicht mehr über empirisch fixierbare Objekte und deren Eigenschaften und Veränderungen gesprochen wird, sondern stattdessen über „Beziehungen zwischen Variablen“.[13]

[13] Man vgl. das in der Fußnote 7 (S. 210) angeführte Zitat von Stinchcombe, in dem

9.2.2 Statistische Begriffsbildungen

1. Um zu verstehen, wie von „Beziehungen zwischen Variablen“ gesprochen werden kann, muß vorab überlegt werden, wie statistische Begriffsbildungen an statistische Variablen anknüpfen. Denn es findet dabei ein eigentümlicher Perspektivenwechsel statt. Zur Erläuterung beziehen wir uns auf eine statistische Variable $X : \Omega \longrightarrow \tilde{\mathcal{X}}$, wobei $\Omega := \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ auf eine Gesamtheit von Objekten verweist und $\tilde{\mathcal{X}} := \{\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m\}$ ein endlicher Merkmalsraum ist. Eine solche Definition läßt zwei unterschiedliche Blickweisen zu. Einerseits stellt sie einen Begriffsrahmen zur Verfügung, um über Eigenschaften der individuellen Mitglieder von Ω zu sprechen. Andererseits kann man von der individuellen Identität der Mitglieder von Ω abstrahieren und sie ausschließlich als Exemplifizierungen der durch $\tilde{\mathcal{X}}$ gegebenen Merkmalswerte betrachten. Diese Abstraktion ist für alle statistischen Begriffsbildungen charakteristisch. Sie beziehen sich nicht auf die namentlich bestimmten Mitglieder von Ω, sondern nur auf Merkmalswerte und deren Häufigkeiten.

2. Alle weiteren Überlegungen knüpfen also bei der Umkehrfunktion X^{-1} an, die in diesem Zusammenhang natürlich als eine Mengenfunktion

$$X^{-1} : \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{X}}) \longrightarrow \mathcal{P}(\Omega)$$

definiert werden muß. Zu jeder Merkmalsmenge $\tilde{X} \subseteq \tilde{\mathcal{X}}$ liefert diese Umkehrfunktion eine Menge

$$X^{-1}(\tilde{X}) = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \in \tilde{X}\}$$

die aus all denjenigen Elementen von Ω besteht, die einen Merkmalswert in der Merkmalsmenge $\tilde{X}$ aufweisen. Insofern ist zwar $X^{-1}(\tilde{X})$ immer noch eine Menge mit namentlich bestimmten Elementen. Aber für alle im eigentlichen Sinn statistischen Begriffsbildungen ist nur von Bedeutung, wieviele Elemente es gibt. Diese Überlegung führt zum Begriff einer statistischen *Häufigkeitsfunktion* (man spricht auch von einer *Häufigkeitsverteilung*), die formal als eine Funktion

$$\mathrm{P}[X] : \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{X}}) \longrightarrow \mathbf{R}$$

definiert werden kann, die jeder Merkmalsmenge $\tilde{X} \subseteq \tilde{\mathcal{X}}$ die Häufigkeit

$$\mathrm{P}[X](\tilde{X}) := \frac{|\, X^{-1}(\tilde{X}) \,|}{|\, \Omega \,|}$$

zuordnet. So wird deutlich, wie bereits am Ausgangspunkt statistischer Begriffsbildungen eine doppelte Abstraktion vollzogen wird. Erstens werden

nicht nur jeder Bezug auf Objekte fehlt, sondern stattdessen eine Sichtweise suggeriert wird, bei der das reale Geschehen darin besteht, daß Variablen unterschiedliche Werte annehmen.

durch statistische Variablen nur Äquivalenzrelationen für die jeweils thematisierten Objektmengen definiert; oder anders formuliert: Objekte gelten als gleich, wenn sie gleiche Merkmalswerte aufweisen. Zweitens werden für alle weiteren Begriffsbildungen nur die absoluten und relativen Häufigkeiten der korrespondierenden Äquivalenzklassen verwendet. Daraus folgt auch, daß mit statistischen Begriffsbildungen keine Modelle konstruiert werden können, die eine explizite Repräsentation individueller Objekte erfordern.

3. Jetzt kann überlegt werden, was statistische Sachverhalte sind. Wir orientieren uns an folgender Definition:

> Ein *statistischer Sachverhalt* entsteht durch die Darstellung einer durch statistische Variablen definierten Häufigkeitsverteilung.

Orientiert man sich an dieser Definition, gibt es im wesentlichen drei Implikationen.

a) Die Formulierung statistischer Sachverhalte setzt eine vorgängige Konzeption statistischer Variablen voraus.

b) Ihre Formulierung impliziert weiterhin einen doppelten Abstraktionsprozeß, wie er oben beschrieben worden ist.

c) Ihre Formulierung besteht in der Darstellung statistischer Häufigkeitsverteilungen.

Im einzelnen gibt es natürlich zahlreiche Varianten. Man kann z. B. Häufigkeitsverteilungen durch Tabellen oder Schaubilder darstellen und sie durch Mittelwerte, Streuungen und andere Eigenschaften charakterisieren. Weiterhin gibt es eine Vielzahl von Begriffsbildungen, die zur Darstellung und Charakterisierung von zwei- und mehrdimensionalen Häufigkeitsverteilungen verwendet werden können. Damit beschäftigt sich die statistische Methodenlehre, wie sie z. B. in unseren „Grundzügen der sozialwissenschaftlichen Statistik“ dargestellt wird.

4. Zwei ergänzende Bemerkungen sollen helfen, unsere Definition statistischer Sachverhalte besser verständlich zu machen. Erstens muß betont werden, daß statistische Sachverhalte nicht unmittelbar empirische Sachverhalte sind, sondern aus empirischen Sachverhalten konstruiert werden. Wie im vorangegangenen Abschnitt erläutert worden ist, kann man korrespondierend zu einer statistischen Variablen $X : \Omega \longrightarrow \tilde{\mathcal{X}}$ auch von einer Menge individuell zurechenbarer Sachverhalte

$$(X(\omega_1))(\omega_1), \ldots, (X(\omega_n))(\omega_n)$$

sprechen. Statistische Begriffsbildungen beziehen sich jedoch nicht auf die individuellen Mitglieder von Ω, sondern auf die Häufigkeiten, mit denen

Merkmalswerte aus dem Merkmalsraum $\tilde{\mathcal{X}}$ bei den Mitgliedern von Ω vorkommen. Wenn man also für statistische Beschreibungen bzw. Sachverhalte ein Objekt angeben möchte (so daß man sagen kann, daß dieses Objekt beschrieben wird), besteht es in der Objekt*menge* Ω. Dem entspricht, *daß statistische Aussagen nicht als All-Aussagen über die Mitglieder von Ω ausgedrückt werden können.*

5. Eine zweite Bemerkung bezieht sich darauf, daß statistische Sachverhalte *konstruiert* werden, denn die Daten, die durch statistische Variablen gegeben sind, können immer auf viele unterschiedliche Weisen dargestellt werden. Das Spektrum der Darstellungsmöglichkeiten wird insbesondere dadurch beliebig groß, daß man zur Repräsentation von durch Daten gegebenen Häufigkeitsverteilungen auch statistische Modelle verwenden kann, die auf Annahmen oder Überlegungen beruhen, die nicht aus den Daten folgen, sondern durch den Modellkonstrukteur eingeführt werden. Infolgedessen kann auch mehr oder weniger unklar werden, ob man bei statistischen Modellen noch davon sprechen kann, daß sie statistische Sachverhalte zum Ausdruck bringen. Die Schwierigkeiten, ein klares Verständnis zu gewinnen, resultieren in erster Linie daraus, daß statistische Modelle unterschiedlichen Fragestellungen dienen können. Allgemein kann man nur sagen, daß statistische Modelle den Zweck haben, den potentiellen Informationsgehalt jeweils gegebener Daten im Hinblick auf eine vorgängige Fragestellung reflektierbar zu machen. Eine grundlegende Aufgabe statistischer Modelle in der empirischen Sozialforschung besteht aber sicherlich darin, Bilder zu vermitteln, anhand derer man über die Beschaffenheit und Entwicklung gesellschaftlicher Verhältnisse nachdenken kann. Die Formulierung soll andeuten, daß man nur unter Vorbehalten von Beschreibungen sprechen kann. Eine meistens angemessenere Vorstellung besteht darin, daß statistische Modelle einer *Repräsentation* von Aspekten gesellschaftlicher Verhältnisse und ihrer Entwicklung dienen können.

9.2.3 Beziehungen zwischen statistischen Variablen

1. Jetzt kann überlegt werden, wie man in der Statistik von „Beziehungen zwischen Variablen" sprechen kann. Dies setzt natürlich als Ausgangspunkt mindestens zwei Variablen voraus. Zwischen zwei oder mehr irgendwie gegebenen statistischen Variablen kann jedoch überhaupt kein Zusammenhang hergestellt werden. Um die Vorstellung einer Beziehung oder eines Zusammenhangs bilden zu können, muß vielmehr vorausgesetzt werden, daß sich mehrere Variablen auf die gleiche Objektmenge beziehen. Dies führt zum Begriff einer mehrdimensionalen statistischen Variablen.

2. Die Begriffsbildung geht von der Idee aus, daß man Objekten gleichzeitig Attribute in mehreren Merkmalsräumen zuordnen kann. Beziehen wir uns exemplarisch auf zwei Merkmalsräume $\tilde{\mathcal{X}}$ und $\tilde{\mathcal{Y}}$, kann man z. B. eine

zweidimensionale Variable in der folgenden Form schreiben:

$$(X,Y) : \Omega \longrightarrow \tilde{\mathcal{X}} \times \tilde{\mathcal{Y}}$$

Durch die zweidimensionale statistische Variable (X,Y) werden jedem Objekt $\omega \in \Omega$ zwei Attribute zugeodnet:

$$(X,Y)(\omega) = (X(\omega), Y(\omega)) \in \tilde{\mathcal{X}} \times \tilde{\mathcal{Y}}$$

Einer zweidimensionalen statistischen Variablen entsprechen also zwei Aussageformen:

$$(X(\omega))(\omega) \quad \text{und} \quad (Y(\omega))(\omega)$$

die man aber durch ein logisches 'und' ($\wedge$) auch zu einer Aussageform

$$((X,Y)(\omega))(\omega) = (X(\omega))(\omega) \wedge (Y(\omega))(\omega)$$

zusammenfassen kann. Eine zur Variablen (X,Y) äquivalente All-Aussage erhält man somit durch

$$\forall\, \omega \in \Omega : ((X,Y)(\omega))(\omega) \quad \text{bzw.} \quad \forall\, \omega \in \Omega : (X(\omega))(\omega) \wedge (Y(\omega))(\omega)$$

3. Um von Beziehungen zwischen zwei oder mehr statistischen Variablen sprechen zu können, müssen sie also zunächst als Komponenten einer mehrdimensionalen Variablen eingeführt werden. Um z. B. von Beziehungen zwischen zwei Variablen X und Y sprechen zu können, muß man sich auf eine zweidimensionale Variable (X,Y) beziehen können. Alle statistischen Begriffsbildungen knüpfen jedoch an Häufigkeitsverteilungen für statistische Variablen an, und dies gilt natürlich auch für mehrdimensionale statistische Variablen. Daraus folgt, daß auch alle Vorstellungen über Beziehungen zwischen Variablen nur von einer vorgängigen Konzeption einer zwei- oder mehrdimensionalen Häufigkeitsverteilung ausgehen können. Diese Überlegung führt schließlich zu der folgenden Feststellung:

> Wenn mit statistischen Begriffsbildungen Aussagen über Beziehungen zwischen Variablen gemacht werden, handelt es sich um Charakterisierungen von Eigenschaften einer zwei- oder mehrdimensionalen Häufigkeitsverteilung und mithin um eine Charakterisierung statistischer Sachverhalte.

4. Als Beispiel kann man an den Begriff einer Kovarianz denken. Die Begriffsbildung setzt voraus, daß man sich auf eine zweidimensionale statistische Variable (X,Y) beziehen kann. Daraus kann zunächst die zweidimensionale Häufigkeitsfunktion

$$\mathrm{P}[X,Y] : \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{X}} \times \tilde{\mathcal{Y}}) \longrightarrow \mathbf{R}$$

gebildet werden, die jeder Teilmenge des kombinierten Merkmalsraums $\tilde{\mathcal{X}} \times \tilde{\mathcal{Y}}$ ihre relative Häufigkeit in der Objektmenge Ω zuordnet. Dann kann man diese zweidimensionale Häufigkeitsverteilung durch Mittelwerte, Varianzen und eine Kovarianz charakterisieren. Durch die Ermittlung einer Kovarianz wird also ein statistischer Sachverhalt charakterisiert, nicht jedoch eine „Beziehung zwischen Variablen".

5. Bemerkenswert ist, daß es sich ebenso bei statistischen Regressionsfunktionen um Charakterisierungen zwei- oder mehrdimensionaler Häufigkeitsverteilungen handelt, so daß auch in diesem Fall das Reden von „Beziehungen zwischen Variablen" leicht irreführend werden kann. Zur Verdeutlichung beziehen wir uns auf eine zweidimensionale Variable (X, Y) und betrachten X als unabhängige und Y als abhängige Variable. Eine allgemeine Regressionsfunktion hat dann die Form

$$\tilde{x} \longrightarrow \mathrm{P}[Y|X = \tilde{x}]$$

Jedem Merkmalswert $\tilde{x}$ im realisierten Merkmalsraum $X(\Omega) \subseteq \tilde{\mathcal{X}}$ wird durch eine solche Regressionsfunktion nicht eine bestimmte Zahl, insbesondere kein Wert im Merkmalsraum von Y, sondern selbst eine Funktion, nämlich die durch $X = \tilde{x}$ bedingte Häufigkeitsfunktion von Y zugeordnet. Spezielle Regressionsfunktionen entstehen dadurch, daß man sich auf bestimmte Charakterisierungen der bedingten Verteilungen bezieht; z. B. auf bedingte Mittelwerte, wodurch eine spezielle Mittelwertregression in der Form

$$\tilde{x} \longrightarrow \mathrm{M}(Y|X = \tilde{x})$$

entsteht. Sie ordnet jedem Merkmalswert $\tilde{x}$ den durch $X = \tilde{x}$ bedingten Mittelwert von Y zu. Sowohl allgemeine als auch spezielle Regressionsfunktionen sind also als Charakterisierungen zwei- oder mehrdimensionaler Häufigkeitsverteilungen und infolgedessen als Charakterisierungen statistischer Sachverhalte aufzufassen.

9.3 Zur Rhetorik des Hypothesenbegriffs

Die Überlegungen der vorangegangenen Abschnitte zum Verständnis statistischer und logischer Variablen sowie sich anschließender statistischer Begriffsbildungen haben gezeigt, daß mit ihrer Hilfe das in der sozialwissenschaftlichen Methodenliteratur verbreitete Reden von Hypothesen als Aussagen über „Beziehungen zwischen Variablen" nicht ohne weiteres rekonstruierbar ist. In den folgenden Abschnitten soll deshalb das Bemühen um ein Verständnis fortgesetzt werden.

9.3.1 Beziehungen zwischen Merkmalsräumen

1. Eine Hauptschwierigkeit besteht darin, daß in der Methodenliteratur „Variablen" als Namen für Merkmalsräume aufgefaßt werden, wodurch nicht nur vom wissenschaftlichen Sprachgebrauch abgewichen wird, sondern auch alle sich anschließenden Redeweisen obskur werden. Dennoch kann man versuchen, eine Überlegung anzuschließen. Unterstellt man nämlich, daß mit „Variablen" eigentlich Merkmalsräume gemeint sind, kann man auch versuchen, das Reden von „Beziehungen zwischen Variablen" so zu verstehen, daß eigentlich „Beziehungen zwischen Merkmalsräumen" gemeint sind. Die Fragestellung läuft dann darauf hinaus, ob und ggf. wie man sinnvoll von „Beziehungen zwischen Merkmalsräumen" sprechen kann und ob und ggf. wie sich ein Reden von „Gesetzmäßigkeiten" daran anschließen läßt.

2. Ein naheliegender Gedanke besteht darin, sich zum Reden über „Beziehungen zwischen Merkmalsräumen" des mathematischen Funktionsbegriffs zu bedienen. Man kann sich an folgendem Schema orientieren:

$$g : \tilde{\mathcal{X}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{Y}} \tag{9.3.1}$$

Hierbei sind $\tilde{\mathcal{X}}$ und $\tilde{\mathcal{Y}}$ zwei Merkmalsräume, und g ist eine Funktion, die jedem Merkmalswert $\tilde{x} \in \tilde{\mathcal{X}}$ einen Merkmalswert $g(\tilde{x}) \in \tilde{\mathcal{Y}}$ zuordnet. Offenbar kann man sich beliebige Funktionen dieser Art ausdenken und dadurch eine jeweils spezifische Beziehung zwischen den beiden Merkmalsräumen herstellen.

3. Aber wozu kann eine solche Überlegung dienen? Offenbar gibt es zunächst keinerlei empirischen Bezug. Soweit in der Statistik von Funktionen der Form (9.3.1) Gebrauch gemacht wird, dienen sie auch nur dazu, um aus gegebenen statistischen Variablen neue statistische Variablen *zu konstruieren*. Hat man nämlich zunächst eine Variable $X : \Omega \longrightarrow \tilde{\mathcal{X}}$, kann man aus ihr mit Hilfe einer Funktion g, die den Merkmalsraum $\tilde{\mathcal{X}}$ in einen neuen Merkmalsraum $\tilde{\mathcal{Y}}$ abbildet, eine neue statistische Variable

$$Y : \Omega \longrightarrow \tilde{\mathcal{Y}}$$

bilden, indem man die Definition

$$Y(\omega) := g(X(\omega))$$

verwendet. Dies ist allerdings ein reiner Konstruktionsprozeß. Man beginnt mit einer ein- oder mehrdimensionalen Variablen X und bildet aus ihr mit Hilfe einer beliebig ausgedachten Funktion g eine neue Variable Y.[14]

4. Diese Idee führt jedoch im Hinblick auf unsere gegenwärtige Fragestellung in eine Sackgasse. Denn es geht hier ja nicht darum, aus gegebenen statistischen Variablen beliebige neue Variablen zu konstruieren, sondern darum, ob und ggf. wie man auf empirisch explizierbare Weise von „Beziehungen zwischen Merkmalsräumen“ sprechen kann. Dafür liefert aber das Schema (9.3.1) keinen Anhaltspunkt, da überhaupt kein Bezug auf empirisch identifizierbare Objekte und ihre Eigenschaften vorgenommen wird. Wollte man einen solchen Bezug herstellen, müßte man zuerst eine zweidimensionale statistische Variable einführen, um die beiden Merkmalsräume $\tilde{\mathcal{X}}$ und $\tilde{\mathcal{Y}}$ auf empirisch ermittelbare Sachverhalte beziehen zu können. Aber wohin führt diese Überlegung? Nehmen wir an, daß eine zweidimensionale statistische Variable

$$(X, Y) : \Omega \longrightarrow \tilde{\mathcal{X}} \times \tilde{\mathcal{Y}}$$

gegeben ist. Die Frage ist dann, ob mit ihrer Hilfe eine Beziehung zwischen den beiden Merkmalsräumen $\tilde{\mathcal{X}}$ und $\tilde{\mathcal{Y}}$ hergestellt werden kann. Man kann sich aber leicht klarmachen, daß dafür eine Funktion der Form (9.3.1) nicht sinnvoll verwendet werden kann. Denn im allgemeinen wird man keine Funktion g finden können, die zur Formulierung einer Aussage der Form

$$\forall\, \omega \in \Omega : \; Y(\omega) \;=\; g(X(\omega))$$

verwendet werden könnte. Es genügt bereits, daß es zwei Objekte in Ω gibt, die im Merkmalsraum $\tilde{\mathcal{X}}$ den gleichen, im Merkmalsraum $\tilde{\mathcal{Y}}$ jedoch unterschiedliche Merkmalswerte aufweisen.

5. Gerade an dieser Stelle setzen natürlich die Überlegungen der statistischen Regressionsrechnung ein, indem eine explizite Abkehr von einem Schema der Form (9.3.1) vollzogen wird und stattdessen spezielle Regressionsfunktionen der Form

$$r : X(\Omega) \longrightarrow \mathbf{R}$$

betrachtet werden. Als Definitionsbereich einer solchen Regressionsfunktion r dient der realisierte Merkmalsraum $X(\Omega) \subseteq \tilde{\mathcal{X}}$; insoweit gibt es

[14] Dies ist der Grundgedanke aller Varianten statistischer Datenkonstruktion, mit denen wir uns ausführlich in einem separaten Text „Methoden sozialwissenschaftlicher Datenkonstruktion“ (Rohwer und Pötter 2002) beschäftigen.

eine Ähnlichkeit zu den im Schema (9.3.1) betrachteten Funktionen g. Aber die möglichen Werte einer solchen Regressionsfunktion sind keine Merkmalswerte im Wertebereich $\tilde{\mathcal{Y}}$ der abhängigen Variablen Y, sondern – abhängig von der Art der speziellen Regressionsfunktion – bedingte Mittelwerte oder bedingte Quantile oder bedingte Häufigkeiten. Es handelt sich um jeweils unterschiedliche Charakterisierungen einer bedingten Häufigkeitsverteilung und infolgedessen nicht um den Objekten in Ω individuell zurechenbare Eigenschaften.

6. Man sollte sich klarmachen, daß die Schwierigkeiten, die mit Vorstellungen über Beziehungen zwischen Merkmalsräumen verbunden sind, nicht aus dem Schema (9.3.1) resultieren, an dem wir uns bisher orientiert haben. Als eine (wie sich zeigen wird: nur scheinbare) Alternative könnte man versuchen, mit Hilfe von Merkmalsräumen Aussageformen zu bilden und dann logische Beziehungen zwischen Aussageformen zu betrachten. Der Grundgedanke kann bereits ohne eine explizite Bezugnahme auf Merkmalsräume deutlich gemacht werden, indem man sich auf zwei Eigenschaften $\tilde{x}$ und $\tilde{y}$ bezieht. Damit kann man die Aussageformen $\tilde{x}(\omega)$ und $\tilde{y}(\omega)$ bilden und dann eine All-Aussage der Form

$$\forall\, \omega \in \Omega : \; \tilde{x}(\omega) \rightarrow \tilde{y}(\omega) \tag{9.3.2}$$

formulieren, zu lesen als: Wenn irgendeinem Objekt in Ω die Eigenschaft $\tilde{x}$ zukommt, dann kommt ihm auch die Eigenschaft $\tilde{y}$ zu.[15] Zur Illustration kann folgende Aussage dienen, die von Bortz und Döring (1995, S. 7) als ein Beispiel für eine „wissenschaftliche Hypothese“ angegeben wird: „Wenn Menschen frustriert sind, dann reagieren sie aggressiv.“ Indem man ‘ist frustriert’ durch $\tilde{x}$ und ‘reagiert aggressiv’ durch $\tilde{y}$ symbolisiert und sich auf eine Menge von Menschen bezieht, kann man sie in die Form des Schemas (9.3.2) bringen.

7. Aber das Problem besteht natürlich darin, daß diese Aussage, so wie alle in der sozialwissenschaftlichen Methodenliteratur als Beispiele angeführten „Gesetzeshypothesen“, falsch ist. Deshalb kann man auch in diesem Fall bestenfalls versuchen, statistische Formulierungen zu verwenden. Den Ausgangspunkt bildet dann eine statistische Variable

$$(X, Y) : \Omega \longrightarrow \tilde{\mathcal{X}} \times \tilde{\mathcal{Y}}$$

mit den Merkmalsräumen $\tilde{\mathcal{X}} := \{\tilde{x}, \tilde{x}'\}$ und $\tilde{\mathcal{Y}} := \{\tilde{y}, \tilde{y}'\}$, wobei die Elemente durch ‘ist frustriert’ ($\tilde{x}$), ‘ist nicht frustriert’ ($\tilde{x}'$), ‘ist aggressiv’ ($\tilde{y}$) und ‘ist nicht aggressiv’ ($\tilde{y}'$) definiert sind. Wenn die Beobachtungen

[15] In dieser Formulierung deutet der Pfeil keine Funktion an, sondern symbolisiert die aussagenlogische Implikation. Gemeint ist, daß eine Aussage $\tilde{x}(\omega) \rightarrow \tilde{y}(\omega)$, wobei jetzt ω der Name für irgendein Objekt ist, genau dann wahr ist, wenn die Aussage $\tilde{x}(\omega)$ falsch oder die Aussage $\tilde{y}(\omega)$ wahr ist.

sich sowohl auf frustrierte als auch auf nicht frustrierte Personen beziehen, kann man eine Regressionsfunktion bilden, die jeder Merkmalsausprägung in $\tilde{\mathcal{X}}$ eine bedingte Häufigkeit für $\tilde{y}$ ('ist aggressiv') zuordnet:

$$r(\tilde{x}) := \mathrm{P}[Y|X=\tilde{x}](\{\tilde{y}\}) \quad \text{und} \quad r(\tilde{x}') := \mathrm{P}[Y|X=\tilde{x}'](\{\tilde{y}\})$$

Wie bereits bemerkt worden ist, wäre es jedoch falsch, diese bedingten Häufigkeiten als Eigenschaften zu betrachten, die man den Mitgliedern von Ω individuell zurechnen könnte. Vielmehr handelt es sich um die Charakterisierung eines statistischen Sachverhalts, der sich auf eine Häufigkeitsverteilung von Merkmalsausprägungen in Ω bezieht.

9.3.2 Hypothetische Generalisierungen

1. Die Überlegungen des vorangegangenen Abschnitts haben gezeigt, daß sich das in der Methodenliteratur verbreitete Reden von Hypothesen auch dann nicht ohne weiteres aufklären läßt, wenn man nicht an „Beziehungen zwischen Variablen“, sondern an „Beziehungen zwischen Merkmalsräumen“ denkt. Denn um überhaupt einen empirischen Bezug herstellen zu können, müssen zunächst statistische Variablen eingeführt werden. Dann aber läßt sich im allgemeinen kein funktionaler oder logischer Zusammenhang zwischen ihren Merkmalsräumen konstruieren, sondern man muß stattdessen in irgendeiner Weise Regressionsfunktionen betrachten, die nicht als Funktionen zwischen Merkmalsräumen expliziert werden können. Bevor wir diesen Gedanken weiter verfolgen, muß jedoch noch ein weiterer Aspekt des in der Methodenliteratur verbreiteten Redens von Hypothesen überlegt werden: daß sie fast immer mit einem unspezifischen Allgemeinheitsanspruch verbunden werden.

2. Exemplarisch beziehen wir uns noch einmal auf Ausführungen von Bortz und Döring (1995, S. 7):

„Wir sprechen von einer wissenschaftlichen Hypothese, wenn eine Aussage oder Behauptung die folgenden drei Kriterien erfüllt:

a) Eine wissenschaftliche Hypothese ist eine allgemeingültige, über den Einzelfall oder ein singuläres Ereignis hinausgehende Behauptung (All-Satz).
b) Einer wissenschaftlichen Hypothese muß zumindest implizit die Formalstruktur eines sinnvollen Konditionalsatzes ('Wenn-dann-Satz' bzw. 'Je-desto-Satz') zugrunde liegen.
c) Der Konditionalsatz muß potentiell falsifizierbar sein, d. h. es müssen Ereignisse denkbar sein, die dem Konditionalsatz widersprechen.

Nach diesen Kriterien wären die folgenden Aussagen als wissenschaftliche Hypothesen zu bezeichnen: 'Frustrierte Menschen reagieren aggressiv': Der Konditionalsatz hierzu lautet: 'Wenn Menschen frustriert sind, dann reagieren sie aggressiv'. Diese Aussage beansprucht Allgemeingültigkeit und ist falsifizierbar. [Es folgen dann weitere Beispiele.]“

Das Beispiel erfüllt ersichtlich die Anforderung (b) und ebenfalls, wie bereits im vorangegangenen Abschnitt bemerkt worden ist, die Anforderung (c), denn die Behauptung ist nicht nur falsifizierbar, sondern falsch. Aber was könnte mit der Anforderung (a) gemeint sein, die die „Allgemeingültigkeit“ einer Hypothese verlangt?

3. Um zu verstehen, was gemeint sein könnte, bietet sich zunächst die in (9.3.2) verwendete Formulierung

$$\forall\,\omega \in \Omega:\ \tilde{x}(\omega) \rightarrow \tilde{y}(\omega) \tag{9.3.3}$$

an. Dies ist offenbar eine All-Aussage mit einem verständlichen Allgemeinheitsanspruch, der darin besteht, daß die Aussage $\tilde{x}(\omega) \rightarrow \tilde{y}(\omega)$ für alle Objekte $\omega \in \Omega$ richtig sein soll. Tatsächlich wird jedoch in der Methodenliteratur großer Wert darauf gelegt, daß der Wertebereich für die logischen Variablen, die in einer dem Anspruch nach „allgemeingültigen“ All-Aussage vorkommen, nicht durch die Angabe einer definiten Menge eingeschränkt wird. Die von Bortz und Döring als Beispiel verwendete All-Aussage wäre dann also folgendermaßen zu formulieren:

$$\forall\,\omega:\ (\tilde{m}(\omega) \wedge \tilde{x}(\omega)) \rightarrow \tilde{y}(\omega) \tag{9.3.4}$$

wobei $\tilde{m}$ das Attribut 'ist ein Mensch' symbolisieren soll. Im Unterschied zur Formulierung (9.3.3) handelt es sich jedoch um eine *indefinite All-Aussage*.

4. Auf die Problematik solcher indefiniten All-Aussagen wurde bereits in Abschnitt 2.7 sowie im Zusammenhang mit Fechners „Kollektivgegenständen“ in Abschnitt 5.2 hingewiesen. Im folgenden soll die Kritik noch einmal aufgegriffen und fortgesetzt werden. Hierfür beziehen wir uns auf die allgemeine Schreibweise

$$\forall\,\omega:\ F(\omega) \rightarrow G(\omega) \tag{9.3.5}$$

die auch in der Literatur oft verwendet wird.[16] Gemeint ist: Für jedes Objekt ω, welcher Art auch immer, gilt: wenn die Aussage $F(\omega)$ wahr ist, dann ist auch die Aussage $G(\omega)$ wahr.[17] Die Schreibweise (9.3.5) ist allerdings noch kein hinreichender Grund, um von einer indefiniten All-Aussage zu sprechen. Denn tatsächlich kann man auch definite Aussagen der Form (9.3.3) mit Hilfe der Schreibweise (9.3.5) ausdrücken, indem man Aussageformen

$$F(\omega) := \omega \in \Omega \wedge \tilde{x}(\omega) \quad \text{und} \quad G(\omega) := \tilde{y}(\omega)$$

[16] Allerdings sind die Notationen nicht einheitlich. Oft wird auch die äquivalente Schreibweise $(\omega)\,(F\omega \supset G\omega)$ verwendet.

[17] Um z. B. die indefinite All-Aussage (9.3.4) in diese Form zu bringen, könnten die Aussageformen durch $F(\omega) := \tilde{m}(\omega) \wedge \tilde{x}(\omega)$ und $G(\omega) := \tilde{y}(\omega)$ definiert werden.

verwendet. So entsteht die Frage, was eigentlich indefinite von definiten Aussagen unterscheidet. Die Schwierigkeit besteht darin, daß man die Unterscheidung nicht auf rein formale Weise explizieren kann; vielmehr geht es darum, ob man sich zum Verständnis des Sinns einer All-Aussage der Form (9.3.5) auf eine Menge der Form

$$F^* := \{\omega \mid F(\omega)\} \tag{9.3.6}$$

beziehen muß und ob und ggf. wie man das auf sinnvolle Weise machen kann. Solche Mengen werden als *Extension* einer Aussageform bezeichnet. Der Begriffsbildung liegt die Vorstellung zugrunde, daß man korrespondierend zu einer Aussageform $F(\omega)$ eine Menge bilden kann, die aus all denjenigen Objekten besteht, für die die Aussageform zu einer wahren Aussage führt. Wenn diese Vorstellung sinnvoll ist, kann man Aussagen der Form (9.3.5) auch in der Form

$$\forall \omega \in F^* : G(\omega) \tag{9.3.7}$$

ausdrücken, wodurch deutlich wird, daß es sich um eine Aussage über alle Elemente der Extension einer Ausssageform handeln soll.

5. Zunächst sollte man sich verdeutlichen, daß nicht alle Aussagen der Form (9.3.5) die gedankliche Bezugnahme auf eine Extension F^* erfordern oder auch nur sinnvoll machen. Als Beispiel kann man anstelle von $F(\omega)$ die Aussageform 'ω ist geschieden' und anstelle von $G(\omega)$ die Aussageform 'ω war bereits mindestens einmal verheiratet' verwenden. Die dann resultierende Aussage der Form (9.3.5) ist jedoch gar keine Aussage über irgendeine Menge von Objekten, von denen man sagen könnte, daß sie geschieden sind. Vielmehr bezieht sie sich auf einen Sprachgebrauch. Sie bringt zum Ausdruck, daß zum gegenwärtigen Sprachgebrauch die Regel gehört, daß die Eigenschaft 'ist geschieden' die Eigenschaft 'war verheiratet' impliziert. Die Unterscheidung ist wichtig, denn von Regeln, im Unterschied zu Aussagen, kann man nicht sagen, daß sie wahr oder falsch sind. Insofern sollten auch Regeln und Aussagen unterschieden werden. Um die Regel, daß die Eigenschaft 'ist geschieden' die Eigenschaft 'war mindestens einmal verheiratet' impliziert, symbolisch auszudrücken, kann man die Schreibweise

$$F(\omega) \Longrightarrow G(\omega) \tag{9.3.8}$$

verwenden. So wird auch deutlich, daß sich Regeln von Aussagen der Form (9.3.5) unterscheiden. Weiterhin wird auch deutlich, wie man mit Hilfe von Regeln All-Aussagen begründen kann. Wird nämlich die Regel (9.3.8) vorausgesetzt, kann man sie verwenden, um zu begründen, daß die korrespondierende All-Aussage der Form (9.3.5) richtig ist. Zugleich wird erkennbar, daß diese All-Aussage gar nichts über die Beschaffenheit unserer Erfahrungswelt aussagt, sondern Implikationen eines Sprachgebrauchs feststellt.

Mit entsprechenden Überlegungen kann man sich verdeutlichen, wie in der Logik All-Aussagen der Form (9.3.5) verwendet werden, um Implikationen von vorab eingeführten Regeln darzustellen.

6. Der Gedankengang sollte deutlich machen, daß eine Verwendung von Aussagen der Form (9.3.5) es keineswegs immer erforderlich macht, sie als Aussagen über Eigenschaften von Objekten zu interpretieren. Eine nicht nur rhetorische (im Prinzip eliminierbare) Bezugnahme auf Objektmengen im Sinn von Extensionen von Aussageformen wird erst erforderlich, wenn man tatsächlich über Eigenschaften von Objekten sprechen möchte. Dann stellt sich allerdings auch die Frage, wie man Aussagen der Form (9.3.5) begründen kann, auf eine neue Weise. Insbesondere ist man dann gezwungen, sich zunächst in irgendeiner Weise *ein Bild der Objekte* zu machen, über die man sprechen möchte. Hier setzt nun eine zweite wichtige Unterscheidung ein. Man kann sich einerseits auf Objekte beziehen, die in unserer Erfahrungswelt identifiziert und deren Eigenschaften empirisch festgestellt werden können. Und man kann sich andererseits auch mit selbsterzeugten Objekten beschäftigen, wobei man exemplarisch an die Mathematik denken kann. Es gibt zwei wichtige Unterschiede. Wenn man sich mit selbsterzeugten Objekten beschäftigt, ist man – abgesehen von den jeweils vorauszusetzenden Regeln des Sprachgebrauchs – im Prinzip frei, die Objekte mit beliebigen Eigenschaften auszustatten. Man kann sich ausdenken, welche Eigenschaften sie haben sollen.[18] Wenn man sich dagegen mit Objekten in unserer Erfahrungswelt beschäftigt, kann man sich deren Eigenschaften nicht ausdenken, sondern geht es vielmehr darum, in Erfahrung zu bringen, wie sie beschaffen sind, sich verhalten und verändern. Das ist die Grundidee jeder empirischen Wissenschaft: sich die Welt nicht auszudenken, sondern zu untersuchen, wie sie wirklich beschaffen ist.

7. Es gibt jedoch noch einen zweiten wichtigen Unterschied. Dort, wo man sich die Objekte, mit denen man sich beschäftigen möchte, ausdenken kann, kann man nicht nur festlegen, welche Eigenschaften sie haben sollen, sondern man kann auch festlegen, *über welche Gesamtheiten von Objekten* man sprechen möchte. Zum Beispiel kann sich ein Mathematiker auf die Gesamtheit der natürlichen Zahlen beziehen und Aussagen über alle Elemente dieser Menge machen. Da es Methoden (z. B. die Methode der vollständigen Induktion) gibt, um Aussagen über alle natürlichen Zahlen zu begründen, kann man zur Aussageform

$$N(\omega) := \omega \text{ ist eine natürliche Zahl}$$

auch die Extension $N^* := \{\omega \mid N(\omega)\}$ bilden und auf diese Weise von

[18] Inhaltliche Einschränkungen können sich natürlich daraus ergeben, daß die ausgedachten Objekte „interessante" oder auch „nützliche" Eigenschaften aufweisen sollten und daß sie „zueinander passen" sollten. Aber das ist hier nicht unser Thema.

einer „Menge aller natürlichen Zahlen“ sprechen. Diese Begriffsbildung hat deshalb einen explizierbaren Sinn, weil es eine Methode gibt, um Aussagen über alle natürlichen Zahlen zu begründen. Ganz anders verhält es sich jedoch in den empirischen Wissenschaften, die sich mit Objekten in unserer Erfahrungswelt beschäftigen. Betrachten wir als Beispiel die Aussageform

$$\tilde{m}(\omega) := \omega \text{ ist ein Mensch}$$

In diesem Fall macht es keinen Sinn, die Extension $\tilde{m}^*$ zu bilden. Denn nicht nur gibt es keine Methode, um Aussagen „über alle Menschen“ zu begründen; es kann nicht einmal gesagt werden, was für eine Art von Menge $\tilde{m}^*$ ist. Sicherlich kann man sich gedanklich auf Mengen von Menschen beziehen, die es in unserer Erfahrungswelt gibt oder gegeben hat. Man könnte sogar versuchen, sich gedanklich auf die Gesamtheit der Menschen zu beziehen, die in der bisherigen Menschheitsgeschichte gelebt haben oder noch leben. Wollte man jedoch korrespondierend zur Aussageform $\tilde{m}(\omega)$ eine „Menge aller Menschen“ bilden, müßte sie zumindest fiktive Namen auch für all diejenigen Menschen enthalten, die heute noch nicht geboren sind. Aber nicht nur kann man Menschen, die vielleicht in einer fernen Zukunft noch geboren werden, heute noch keine Namen geben; man kann auch heute noch keinerlei bestimmte Aussagen über ihre Eigenschaften machen. Infolgedessen entsteht aber durch die Extension $\tilde{m}^*$ nur eine *Pseudo-Menge*, die teilweise aus Elementen besteht, von denen man sagen kann, daß es sie gibt oder gegeben hat, andererseits aber auch aus Elementen, von denen man dies nicht sagen kann, sondern die – wenn überhaupt auf irgendetwas – nur auf zukünftige Möglichkeiten verweisen.[19]

8. Jetzt kann präzisiert werden, was mit *indefiniten All-Aussagen* gemeint sein soll. Wir verwenden diese Bezeichnung für All-Aussagen der Form (9.3.5), wenn ihre Explikation die gedankliche Bezugnahme auf eine Extension F^* erfordert, die ihrerseits keine sinnvoll definierbare, sondern eine Pseudo-Menge ist. Exemplarisch kann man an das Beispiel von Bortz und Döring denken, das in (9.3.4) angeführt worden ist. Es handelt sich um eine indefinite All-Aussage, weil sie ihrer Intention nach eine Aussage über alle Mitglieder einer Pseudo-Menge macht. An diesem Beispiel kann man sich auch noch einmal die Problematik solcher indefiniten All-Aussagen überlegen. Sie besteht erst in zweiter Linie darin, daß solche Aussagen nicht begründet werden können. Das ist trivialerweise der Fall, weil das für Begründungen erforderliche empirische Wissen sich nur auf Erfahrungen beziehen kann, die bisher gemacht und überliefert worden sind.[20] In erster Linie besteht die Problematik vielmehr darin, daß man sich kein Bild von der Extension der Aussageform machen kann, über deren Elemente scheinbar gesprochen wird. Es ist aufschlußreich, an dieser Stelle noch einmal auf die Formulierungen zu achten, die von Bortz und Döring in dem eingangs angeführten Zitat verwendet werden. Sie beginnen mit der alltagssprachlichen Formulierung: „Frustrierte Menschen reagieren aggressiv“. Jemand könnte diesen Satz sagen, um damit eine Reihe von Erfahrungen zum Ausdruck zu bringen, die er bisher mit frustrierten Menschen gemacht hat. Aber sicherlich würde normalerweise niemand auf die Idee kommen, diesen Satz als eine indefinite All-Aussage zu formulieren, die sich in ihrem Anspruch auf alle Menschen, die bisher gelebt haben und in der Zukunft noch geboren werden, bezieht. Es wäre auch vollständig uninteressant, wenn jemand, statt über Erfahrungen zu berichten, mitteilt, daß er an eine indefinite All-Aussage glaubt. Aber genau diese Verkehrung wird von Bortz und Döring vorgeschlagen, wenn sie als scheinbare Reformulierung die Aussage „Wenn Menschen frustriert sind, dann reagieren sie aggressiv“ anbieten und ihr einen Anspruch auf „Allgemeingültigkeit“ unterstellen.

[19] Man kann die hier gemeinte Sinnvoraussetzung auch so ausdrücken: Eine definite Menge darf nur Namen für Objekte enthalten, die es in einem explizierbaren Sinn des Wortes gibt oder gegeben hat. In einer Schrift über „The Nature of Logic“ (1848) hat George Boole diese Sinnvoraussetzung folgendermaßen dargestellt: „Both in reasoning and discourse we form a tacit assumption as to the range of things concerning which we reason or discourse. Ordinarily this assumption amounts only [to] this viz. that the things are things really existing as when we say Men are mortal in which case we speak of all men that exist. Sometimes we implicitly confine ourselves to things existing in a particular country or district as when we say Corn is dear in which case we do not mean all the corn that exists but only the corn that is for sale in a particular region. Sometimes we speak of things which do not exist but are the mere products of the imagination as when we say The Centaur is a fabulous being. Now whatever is that range of things to which our discourse is confined and from which all the things that we discourse of are taken – that range of things we shall define as the Universe of Discourse.“ (Boole 1997, S. 4) Diese vorsichtige Position von Boole steht in einem bemerkenswerten Kontrast zu der von einigen Wissenschaftstheoretikern vertretenen Meinung, daß man praktisch ohne Einschränkungen zu jeder beliebigen Aussageform eine sinnvolle Extension bilden könne; man vgl. z. B. W. Balzer (1997, S. 79).

9. Warum sind viele Autoren gleichwohl der Meinung, daß sozialwissenschaftliche Hypothesen als indefinite All-Aussagen formuliert werden sollten? Es gibt hauptsächlich zwei Argumente. Das erste Argument besagt, daß man indefinite All-Aussagen benötigt, um erklären zu können, warum es zu irgendeinem Sachverhalt oder Ereignis gekommen ist. Z. B. findet sich dieser Gedanke bei W. Stegmüller (1983, S. 115) in folgender Weise:

„Eine noch so vollständige und genaue Beschreibung liefert keinen Ersatz für eine Erklärung. Wissen wir auch in allen Einzelheiten, was geschehen ist, so kann uns der Vorgang dennoch unverständlich bleiben. Erst nach der befriedigenden Be-

[20] Insbesondere durch den Einfluß von K. Popper ist die Auffassung verbreitet worden, daß indefinite All-Aussagen gleichwohl einen Sinn daraus beziehen können, daß sie falsifiziert werden können. Zwar hat Popper versucht, seine Überlegung nicht als ein „Sinnkriterium“ zu verstehen; man vgl. z. B. seine „Logik der Forschung“ (1966, S. 15). Tatsächlich hat er jedoch immer wieder Formulierungen verwendet, die genau ein solches Verständnis nahelegen, z. B. die folgende: „Durch die Falsifikation unserer Annahmen bekommen wir tatsächlich Kontakt mit der ‘Wirklichkeit’. Die Widerlegung unserer Irrtümer ist die positive Erfahrung, die wir aus der Wirklichkeit gewinnen.“ (Popper 1949/1972, S. 57) Aber das ist offenbar eine sehr kuriose Auffassung.

antwortung der Erklärung heischenden Warum-Frage ist unser tieferes Bedürfnis nach Erkenntnis befriedigt. Wir wissen dann nicht nur, was geschieht, sondern warum es geschieht. Dieses zweite Wissen erlangen wir dadurch, daß wir neben der Kenntnis der Einzeltatsachen zusätzlich *die gesetzmäßigen Zusammenhänge zwischen diesen Einzeltatsachen* erkennen.“

Etwas später sagt Stegmüller dann genauer, wie er sich Erklärungen vorstellen möchte:

„Allgemein ist also die Situation die: Zu erklären ist ein spezielles Vorkommnis an einer bestimmten Raum-Zeit-Stelle. Es werde *Explanandum* genannt. Um die Erklärung liefern zu können, müssen zunächst gewisse Bedingungen angegeben werden, die vorher oder gleichzeitig realisiert waren. Diese Bedingungen sollen als *Antecedenzbedingungen* $A_1, \ldots, A_n$ bezeichnet werden. Ferner müssen gewisse *Gesetzmäßigkeiten* $G_1, \ldots, G_r$ formuliert werden. Die Erklärung besteht darin, den Satz E, der das zu erklärende Phänomen beschreibt, aus diesen beiden Klassen von Sätzen, d. h. aus der Satzklasse $\{A_1, \ldots, A_n, G_1, \ldots, G_r\}$, logisch abzuleiten.“ (Stegmüller 1983, S. 120)

Mehr oder weniger explizit orientiert sich auch ein großer Teil der sozialwissenschaftlichen Methodenliteratur an einer solchen Idee für Erklärungen. Aber handelt es sich um eine sinnvolle Idee?

10. Ein erster Vorbehalt betrifft bereits die Möglichkeit solcher Erklärungen. Denn die „Gesetzmäßigkeiten“, auf die Stegmüller für nomologische Erklärungen zurückgreifen möchte, gibt es ja tatsächlich nicht, sondern sie entstehen nur dadurch, daß man zuerst indefinite All-Sätze bildet und diese dann rein rhetorisch als „Gesetzmäßigkeiten“ bezeichnet. Indefinite All-Sätze können aber sicherlich den Objekten in unserer Erfahrungswelt nicht vorschreiben, wie sie sich zu verhalten haben.[21] Man kann zwar

[21] Dies war die ursprüngliche Auffassung von „Naturgesetzen“, daß es sich um göttliche Vorschriften für das Verhalten der Objekte in der Natur handelt. Zwar ist später versucht worden, solche Vorstellungen zu vermeiden und nur noch von „Regelmäßigkeiten“ zu sprechen. Dazu hat W. Wundt (1886, S. 496) treffend bemerkt: „Im siebzehnten Jahrhundert gibt Gott die Naturgesetze, im achtzehnten thut es die Natur selbst, und im neunzehnten besorgen es die einzelnen Naturforscher.“ Die Grundidee der ursprünglichen Vorstellung, daß Objekte in ihrem Verhalten durch Gesetze *beherrscht* werden, kommt jedoch bis heute immer wieder zum Vorschein. Exemplarisch sei auf Ausführungen von K. Popper (1957/1972) hingewiesen. Zunächst kritisiert Popper eine Auffassung, die er „Essentialismus“ nennt, und betont, daß „wir ‘Was-ist?’-Fragen aufgeben [müssen]: Fragen, die danach fragen, was ein Ding ist, was seine wesentliche Eigenschaft oder Beschaffenheit ist. Denn wir müssen die für den Essentialismus charakteristische Ansicht aufgeben, nach der es einen wesentlichen Bestandteil, eine inhärente Beschaffenheit oder ein innewohnendes Prinzip in jedem Ding gibt (ähnlich wie den Weingeist im Wein), die ‘Natur’ des Dinges, die es begründet oder erklärt, daß es ist, was es ist, und sich daher auf seine besondere Weise verhält. Diese animistische Anschauung erklärt nichts [...].“ (S. 33) Dann schlägt Popper als Alternative vor: „Indem wir Erklärungen in der Form von universellen Naturgesetzen wählen, schlagen wir eine Lösung für genau dieses zuletzt erwähnte (platonische) Problem vor. Denn wir stellen uns alle individuellen Dinge und alle einzelnen Tatsachen als diesen Gesetzen unterworfen vor. Die Gesetze (die ihrerseits immer einer weiteren Erklärung bedürfen) erklären daher

glauben, daß alle Menschen aggressiv reagieren, wenn sie frustriert sind; aber weil irgendjemand dies glaubt, ist natürlich niemand gezwungen, sich dementsprechend zu verhalten. Aber vielleicht noch wichtiger ist eine zweite Überlegung: daß ein Glaube an „Gesetzmäßigkeiten“, die aus hypothetischen Verallgemeinerungen resultieren, auch gar nicht „unser tieferes Bedürfnis nach Erkenntnis“ befriedigen würde. Soll z. B. erklärt werden, warum sich jemand aggressiv verhält, würde ein Hinweis auf eine vorausgegangene Frustration bestenfalls zu einer neuen Warum-Frage führen, da es ja keineswegs selbstverständlich ist, daß man sich infolgedessen aggressiv verhält. Tatsächlich führt schon die Idee, daß Sachverhalte und Ereignisse aus „Gesetzmäßigkeiten“ und „Antecedenzbedingungen“ *logisch abgeleitet* werden könnten, in eine Sackgasse, da sie auf einem falschen Verständnis von Warum-Fragen beruht. Anstelle der Frage, warum etwas geschehen ist, unterstellt sie nämlich eine ganz andere: warum etwas so geschehen mußte, wie es geschehen ist. C. G. Hempel, einer der maßgeblichen Wegbereiter der Idee nomologischer Erklärungen, hat das explizit folgendermaßen formuliert:

„The explanation here outlined may be regarded as an argument to the effect that the phenomenon to be explained, *the explanandum phenomenon*, was to be expected in virtue of certain explanatory facts. These fall into two groups: (i) particular facts and (ii) uniformities expressible by means of general laws.“ (Hempel 1965, S. 336)[22]

11. Ein zweites Argument für die Verwendung indefiniter All-Aussagen bezieht sich explizit auf das Erkenntnisinteresse, wie es in dem zuletzt angeführten Zitat von Hempel zum Ausdruck kommt. Es lautet, daß man „Gesetzmäßigkeiten“ benötigt, um sich in der Erfahrungswelt erfolgreich orientieren und zutreffende Voraussagen machen zu können. Die Berechtigung eines Interesses an Orientierung und erfolgreichem Handeln soll natürlich nicht bestritten werden. Aber es kann sicherlich nicht dadurch befriedigt werden, daß man empirisch ermittelbare Sachverhalte hypothetisch verallgemeinert und die Verallgemeinerungen dann als „Gesetzmäßigkeiten“ deklariert. Tatsächlich ist es für das angedeutete praktische Erkenntnisinteresse auch gar nicht erforderlich, in gewisser Weise sogar hinderlich, ein bisher erworbenes Erfahrungswissen durch hypothetische Verallgemeinerung in die sprachliche Form indefiniter All-Aussagen zu bringen. Denn praktisches Orientierungsbemühen bezieht sich stets auf konkrete Situationen, etwa darauf, wie sich bestimmte Dinge oder Menschen in bestimmten Situationen verhalten werden. Dafür ist es sicherlich hilfreich, wenn man

Regelmäßigkeiten oder Ähnlichkeiten individueller Dinge oder individueller Tatsachen oder Ereignisse.“ (S. 34)

[22] In der philosophischen Diskussion ist hauptsächlich ein anderes Problem aufgegriffen worden: daß Argumente zur Begründung von Prognosen und Argumente zur Erklärung realisierter Sachverhalte zu unterscheiden sind; man vgl. z. B. A. Beckermann (1975).

mit ähnlichen Situationen und ähnlichen Dingen und Menschen schon zuvor Erfahrungen gemacht hat. Aber es ist dafür weder erforderlich noch hilfreich, an indefinite All-Aussagen zu glauben, die sich auf das Verhalten beliebiger Dinge oder Menschen in beliebigen Situationen beziehen. Zwar kann man Modelle konstruieren und für eine korrespondierende Modellwelt Regeln einführen und, durch Rückgriff auf diese Regeln, All-Aussagen begründen. Sie gelten dann sicherlich für die Modellwelt.[23] Aber daß dann die Regeln bzw. All-Aussagen in der Modellwelt gelten, impliziert natürlich nicht, daß sie auch in derjenigen Situation gelten, in der man sich – ggf. mit Hilfe eines Modells – orientieren möchte.

9.3.3 Probabilistische Formulierungen

1. Kehren wir jetzt zu unserer Ausgangsfrage zurück, ob man das in der sozialwissenschaftlichen Methodenliteratur verbreitete Reden von Hypothesen durch Vorstellungen über „Beziehungen zwischen Merkmalsräumen“ verstehen kann. Die bisher besprochene und kritisierte Idee bestand darin, zur Formulierung solcher Hypothesen All-Aussagen zu verwenden, entweder in der Form definiter wie in (9.3.3) oder in der Form indefiniter All-Aussagen wie in (9.3.5). Unabhängig davon, ob man definite oder indefinite Formulierungen verwendet, wurde bereits gezeigt, daß statistische Aussagen, die sich auf Häufigkeitsverteilungen in Gesamtheiten beziehen, nicht in der Form solcher All-Aussagen ausgedrückt werden können. Dem entspricht, daß in der Methodenliteratur fast immer ein unvermittelter Bruch in der Gedankenführung auftritt. Zum Beispiel wird in dem Methodenlehrbuch von Schnell, Hill und Esser (1999) zunächst ausführlich dargestellt, daß man sich sozialwissenschaftliche Hypothesen als ihrem Anspruch nach nomologische Aussagen über „Beziehungen zwischen Merkmalsräumen“ vorstellen sollte; dann folgt jedoch unvermittelt ein neuer Abschnitt mit der Überschrift „Induktiv-statistische Erklärung“ (Schnell, Hill und Esser 1999, S. 64), der mit der folgenden Bemerkung beginnt:

„Da in den Sozialwissenschaften keine deterministischen Gesetze zur Erklärung eines Sachverhaltes bekannt sind, wird in der Forschungspraxis zumeist die sogenannte ‘*induktiv-statistische*’ oder ‘*probabilistische*’ Erklärung verwendet.“

Damit wird jedoch eine ganz andersartige Vorstellung über Hypothesen eingeführt, die mit der ursprünglich vertretenen Auffassung, daß Hypothesen als „Beziehungen zwischen Merkmalsräumen“ verstanden werden können, nicht mehr vereinbart werden kann.

2. Dieser Punkt ist wichtig, weil die erforderliche Revision des Hypothesenbegriffs in der Methodenliteratur meistens nicht explizit vollzogen wird, so

[23] Hinweise auf diese Idee, Gesetze als Regeln zu verstehen, die in von Menschen konstruierten Modellen gelten, findet man z. B. bei R. Giere (1999, S. 94ff).

daß die Hypothesenrhetorik schließlich vollends unklar wird. Als Beispiel sei angeführt, wie bei Bortz und Döring (1995, S. 11) der Übergang von einem nomologischen zu einem probabilistischen Reden von Hypothesen auftritt:

„Anders als in vielen Bereichen der Naturwissenschaften beinhaltet die Überprüfung einer sozialwissenschaftlichen Hypothese typischerweise den empirischen Nachweis, daß die behauptete Beziehung zwischen den Variablen ‘im Prinzip’ besteht, und nicht, daß der Wenn-dann-Satz für *jedes einzelne* Untersuchungsobjekt *perfekt* zutrifft. In den Sozialwissenschaften haben Hypothesen den Charakter von *Wahrscheinlichkeitsaussagen*; deterministische Zusammenhänge, wie man sie zuweilen in den exakten Naturwissenschaften formuliert, sind für soziale Phänomene in der Regel unangemessen.“

So wird der Eindruck vermittelt, als bestünde der Unterschied zwischen nomologischen und probabilistischen Hypothesen darin, daß erstere „für alle Fälle“, letztere jedoch nur für „mehr oder weniger viele Fälle“ zutreffend sind. Die gleiche Vorstellung wird auch von Schnell, Hill und Esser (1999, S. 65) nahegelegt, indem sie zur Erläuterung ihrer Vorstellungen über „induktiv-statistische Erklärungen“ folgendes Beispiel angeben:

„*Struktur und Komponenten einer I-S-Erklärung*:

Gesetz G1	Für 90 % aller Fälle gilt: Wenn Personen ein Monatseinkommen über DM 3.000 haben, dann besuchen sie regelmäßig die Oper.	
Randbedingung	Person X hat ein Einkommen von DM 3.200	$l = .90$
Explanandum	Person X besucht regelmäßig die Oper.	

Im Beispiel stellt G1 eine statistische Aussage dar, die auf 90 % der Fälle beschränkt ist. Diese 90 % geben eine statistische Wahrscheinlichkeit bzw. eine relative Häufigkeit wieder. Die Angabe $l = .90$ gibt die ‘induktive Wahrscheinlichkeit’ an, mit der das Explanans das Explanandum stützt bzw. das Ausmaß, in dem es rational ist zu erwarten, daß das Explanandum aus dem Explanans folgt.“

Mit diesem Argumentationsschema beschäftigen wir uns in Abschn. 9.3.5. Hier interessiert zunächst die Frage, wie man probabilistische Hypothesen, in diesem Beispiel das „Gesetz G1“, verstehen kann.

3. Um eine Antwort zu finden, ist es erforderlich, zwischen statistischen Variablen und Zufallsgeneratoren zu unterscheiden. Zunächst setzen wir einen statistischen Kontext voraus, also eine Gesamtheit von Objekten Ω, für deren Mitglieder sich bestimmte Eigenschaften ermitteln lassen. Um bei dem eben angeführten Beispiel zu bleiben, könnte man sich auf eine Menge von Menschen beziehen, bei denen sich ermitteln läßt, welches Einkommen sie beziehen und ob sie regelmäßig in die Oper gehen. Es gibt dann eine zweidimensionale statistische Variable

$$(X,Y) : \Omega \longrightarrow \tilde{\mathcal{X}} \times \tilde{\mathcal{Y}}$$

wobei $\tilde{\mathcal{X}} := \{\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \ldots\}$ ein Merkmalsraum für Einkommen ist und durch den Merkmalsraum $\tilde{\mathcal{Y}} := \{\tilde{y}_0, \tilde{y}_1\}$ erfaßt wird, ob ein regelmäßiger Opernbesuch erfolgt ($\tilde{y}_1$) oder nicht ($\tilde{y}_0$). Dann kann man die relativen Häufigkeiten für die verschiedenen Merkmalsausprägungen berechnen, insbesondere die relative Häufigkeit für $\{\tilde{y}_1\}$ (regelmäßiger Opernbesuch) unter der Bedingung, daß das Einkommen mehr als 3000 DM beträgt. So gelangt man vielleicht zu folgender Aussage:

$$\mathrm{P}[Y|X > 3000](\{\tilde{y}_1\} \;=\; 0.9 \tag{9.3.9}$$

und kann dann behaupten, daß 90 % derjenigen Personen aus Ω, deren Einkommen größer als 3000 DM ist, regelmäßig in die Oper gehen.

4. Hier muß man jedoch sogleich zwei ergänzende Feststellungen machen. Erstens muß noch einmal daran erinnert werden, daß sich statistische Aussagen der Form (9.3.9) nicht als Aussagen über die individuellen Mitglieder von Ω darstellen lassen. Zwar kann man mit Hilfe der Merkmalsräume $\tilde{\mathcal{X}}$ und $\tilde{\mathcal{Y}}$ Aussageformen definieren, deren logische Variablen sich auf Mitglieder von Ω beziehen. Zum Beispiel könnte man eine Aussageform $\tilde{e}(\omega)$ einführen, die genau dann wahr wird, wenn für ω der Name einer Person eingesetzt wird, die mehr als 3000 DM Einkommen bezieht. Aber die Aussage (9.3.9) kann nicht in eine Aussage der Form

$$\forall\, \omega \in \Omega :\; \tilde{e}(\omega) \rightarrow \tilde{z}(\omega)$$

übersetzt werden, wobei $\tilde{z}$ als eine individuell zurechenbare Eigenschaft definiert werden könnte. Es wäre auch offenbar unsinnig, davon zu sprechen, daß jedes Mitglied von Ω, dem die Eigenschaft $\tilde{e}$ zukommt, infolgedessen die Eigenschaft $\tilde{y}_1$ mit einer Häufigkeit von 0.9 aufweist. Der Begriff einer relativen Häufigkeit, auf dessen Verwendung die Aussage (9.3.9) beruht, verlangt vielmehr als eine Sinnvoraussetzung, daß man sich gedanklich auf eine Gesamtheit von Objekten beziehen kann.

5. Die zweite Bemerkung betrifft den Geltungsanspruch der in (9.3.9) angegebenen Aussage. Sie formuliert einen statistischen Sachverhalt, so wie dieses Wort in Abschnitt 9.2.2 definiert worden ist. Ihr Geltungsanspruch resultiert daraus, daß man bei einer bestimmten Gesamtheit Ω Werte der Variablen (X, Y) ermittelt hat, und er bezieht sich infolgedessen ausschließlich auf diese Gesamtheit. Diese Bemerkung ist deshalb wichtig, weil an dieser Stelle in der Methodenliteratur fast immer ein neuer Gedankengang einsetzt: daß man auch statistische Aussagen der Form (9.3.9), in Analogie zu Aussagen über individuelle Objekte, mit einem unspezifischen Allgemeinheitsanspruch ausstatten könne, um auf diese Weise zu „probabilistischen Gesetzen" zu gelangen. Als Beispiel kann man an die Formulierung des oben zitierten „Gesetzes G1" denken. In der von Schnell, Hill und Esser gewählten Formulierung bleibt ersichtlich unbestimmt, auf welche Gesamtheit von Personen sich die Aussage beziehen soll. Hätten sie sich auf eine bestimmte Gesamtheit von Personen bezogen, wäre auch sogleich deutlich geworden, daß es sich sicherlich nicht um ein Gesetz handelt. Aber ein Gesetz entsteht natürlich auch nicht dadurch, daß man in der Formulierung einer statistischen Aussage den für ihre Explikation erforderlichen Bezug auf eine jeweils bestimmte Gesamtheit von Objekten einfach wegläßt.

6. Der Glaube, daß man aus statistischen Aussagen, indem man sie unbestimmt formuliert, Gesetze machen könne, ist allerdings auch von einigen Wissenschaftstheoretikern verbreitet worden.[24] Schwierigkeiten treten indessen bereits bei der Frage auf, wie statistische Aussagen mit einem unbestimmten Allgemeinheitsanspruch überhaupt formuliert werden können. Im vorangegangenen Abschnitt wurde besprochen, wie dies bei All-Aussagen der Form (9.3.5) dadurch erreicht werden kann, daß man ihren Geltungsanspruch nur durch eine Aussageform einschränkt. Der Versuch, in analoger Weise auch statistische Aussagen mit einem unbestimmten Allgemeinheitsanspruch auszustatten, führt jedoch zu sinnlosen Formulierungen. Um das zu zeigen, beziehen wir uns auf Überlegungen von C. G. Hempel, die dem Zweck dienen sollten, ausgehend von statistischen Sachverhalten eine Variante nomologischer Erklärungen vorstellbar zu machen. In einer seiner Arbeiten hat Hempel den Gedanken folgendermaßen erläutert:

„We now turn our attention to explanations based on nomological statements of a kind we have not so far considered, which have come to play an increasingly important role in empirical science. I will refer to them as *laws or theoretical principles of statistic-probabilistic form*, or as *statistical laws*, for short.

Most of our discussion will be concerned with the explanatory use of statistical laws of a very simple kind; we will call them *laws of basic statistical form*. These are statements to the effect that the statistical probability for an event of kind F to be also of kind G is r, or that

$$p(G, F) \;=\; r$$

for short. Broadly speaking, this statement asserts that in the long run the proportion of those instances of F which are also instances of G is approximately r." (Hempel 1965, S. 376)

Die Idee besteht also im Kern darin, daß man aus statistischen Aussagen (also Aussagen über relative Häufigkeiten in endlichen Gesamtheiten) dadurch probabilistische Gesetze machen könne, daß man (a) den Bezug auf definite Gesamtheiten wegläßt und (b) statt von relativen Häufigkeiten von Wahrscheinlichkeiten spricht.

7. Es ist wichtig zu verstehen, wie Hempel seine Idee probabilistischer Gesetze von statistischen Aussagen der Form (9.3.9) unterscheidet. Er sagt:

[24] Man vgl. z. B. Stegmüller (1983, S. 842).

“Laws of basic statistical form may be regarded as less stringent counterparts of laws that have the universal conditional form[25]

$$(x)\,(Fx \supset Gx)$$

asserting that any instance of F is an instance of G, as for example: ‘Any gas expands when heated under constant pressure’. [...] As we noted earlier, a statement which is logically equivalent to a finite conjunction of singular sentences, and which in this sense makes a claim concerning only a finite class of cases, does not qualify as a law and lacks the explanatory force of a nomological statement. [...] Similarly, the probabilistic laws of genetics or of radioactive decay are not tantamount to descriptive reports of the frequencies with which some kind of phenomenon has been found to occur in a finite class of observed cases: they assert certain peculiar, namely probabilistic, modes of connection between potentially infinite classes of occurrences. In a statistical law of basic form, as contradistinguished from a statistical description specifying relative frequencies in some finite set, the ‘reference class’ F is not assumed to be finite. Indeed, we might say that a law of the form ‘$p(G,F) = r$’ refers not only to all actual instances of F, but, so to speak, to the class of all its potential instances.” (Hempel 1965, S. 377)

Statistische Aussagen der Form (9.3.9) sind also Hempel zufolge keine „statistical laws“, da sie nur Beschreibungen statistischer Sachverhalte in endlichen (empirisch identifizierbaren) Gesamtheiten zum Ausdruck bringen. Soweit kann man sicherlich zustimmen.

8. Aber wie vollzieht sich der Übergang zu „Gesetzen“ (indefiniten All-Aussagen)? Die Vorstellung, daß man die endlichen Gesamtheiten, auf die sich die Häufigkeitsaussagen der Statistik beziehen, umstandslos durch unendliche Referenzklassen substituieren könnte, führt bereits in der Begriffsbildung in eine Sackgasse. Denn selbst wenn man bereit wäre, die Vorstellung zu akzeptieren, daß man korrespondierend zu Aussageformen $F(\omega)$ und $G(\omega)$ von ihren Extensionen als „Klassen von Objekten“ sprechen kann, könnte kein Anschluß an statistische Begriffsbildungen gefunden werden. Denn wie weiter oben schon ausgeführt wurde, muß zur Interpretation statistischer Aussagen auf eine wesentlich andere Weise auf Referenzklassen Bezug genommen werden als bei (indefiniten) All-Aussagen, die sich auf individuelle Objekte beziehen. Mit einer Aussage der Form

$$\forall\,\omega:\; F(\omega) \;\rightarrow\; G(\omega)$$

wird behauptet, daß jedem Objekt, dem die Eigenschaft F zukommt, auch die Eigenschaft G zukommt. Sobald man indessen Vorstellungen über relative Häufigkeiten einführt, kann man sich nicht länger auf individuelle Objekte beziehen, sondern benötigt eine Objektmenge, die als Gegenstand

[25] [Die folgende Formulierung ist in unserer Schreibweise äquivalent mit der Formulierung $\forall\,x:\; F(x) \rightarrow G(x)$, wobei $F(x)$ und $G(x)$ Aussageformen sind.]

einer Aussage über relative Häufigkeiten dienen kann.[26] Nun können aber Extensionen von Aussageformen überhaupt nicht ohne weiteres als Objektmengen für Aussagen über relative Häufigkeiten verwendet werden, es sei denn, daß man gewährleisten kann, daß sie endlich sind. Diesen Fall möchte Hempel jedoch explizit ausschließen, um an einem unbestimmten Allgemeinheitsanspruch festhalten zu können, den er für nomologische Aussagen als wesentlich ansieht. Dann aber kann man nicht mehr von relativen Häufigkeiten sprechen, da diese nur für endliche Mengen definierbar sind.

9. Offenbar handelt es sich um eine Variante des Versuchs, den Wahrscheinlichkeitsbegriff frequentistisch zu deuten, wie wir ihn bereits in Abschnitt 6.2.1 bei R. A. Fisher kennengelernt haben. In der Begriffsbildung gibt es tatsächlich keinen wesentlichen Unterschied zwischen den „hypothetisch-unendlichen Populationen“ Fishers und Hempels Bezugnahme auf Referenzklassen, die als unendliche Extensionen von Aussageformen definiert sind. (Diese Variante einer frequentistischen Wahrscheinlichkeitsdeutung muß von derjenigen von R. v. Mises unterschieden werden, vgl. Abschnitt 8.2; denn v. Mises hat versucht, sich explizit auf Folgen zu beziehen, um Wahrscheinlichkeiten als Grenzwerte relativer Häufigkeiten zu definieren.) Es sollte indessen bemerkt werden, daß der gedankliche Fehler nicht allein darin besteht, den Begriff einer relativen Häufigkeit auf unendliche Referenzklassen anzuwenden. Man könnte ja versuchen, sich die Idee der hypothetischen Verallgemeinerung einer statistischen Aussage so vorzustellen, daß man zwar zu beliebig großen, aber immer noch endlichen Referenzklassen übergeht.[27] Ausgangspunkt wäre dann zunächst eine statistische Variable

$$X:\Omega \longrightarrow \tilde{\mathcal{X}}$$

durch die eine Häufigkeitsverteilung $\mathrm{P}[X]$ gebildet werden kann. Dann denkt man sich eine beliebige, aber immer noch endliche Obermenge

[26] Dies Erfordernis wird oft durch eine irreführende Analogie verschleiert. Bei Hempel (1965, S. 379) kommt sie in folgenden Bemerkungen zum Ausdruck: „... the distinction between lawlike statements of strictly universal form and those of probabilistic form pertains, not to the evidential support of the statements in question, but to the claims made by them: roughly speaking, the former attribute (truly or falsely) a certain characteristic to all members of a certain class; the latter, to a specified proportion of its members.“ Wörtlich genommen ist die Aussage jedoch falsch. Zwar kann man z. B. die statistische Aussage (9.3.9) auch durch eine Bezugnahme auf Teilgesamtheiten ausdrücken:

$$\frac{|\,\{\omega\in\Omega\,|\,\tilde{e}(\omega)\wedge\tilde{o}(\omega)\}\,|}{|\,\{\omega\in\Omega\,|\,\tilde{e}(\omega)\}\,|} = 0.9$$

wobei sich die Aussageform $\tilde{o}(\omega)$ auf „regelmäßigen Opernbesuch“ bezieht. Sobald man jedoch die Gleichung als Aussage über eine relative Häufigkeit ausspricht, geht der Bezug auf eine bestimmte Teilmenge von Ω, wie sie hier im Zähler steht, verloren.

[27] Dieser Vorschlag wurde z. B. von K.-D. Opp (1999, S. 51) gemacht.

$\Omega^* \supset \Omega$ aus und eine korrespondierende statistische Variable

$$X^* : \Omega^* \longrightarrow \tilde{\mathcal{X}}$$

mit der man hypothetisch eine Häufigkeitsverteilung $\mathrm{P}[X^*]$ bilden kann. Aber mit welcher Überlegung könnte man begründen, daß $\mathrm{P}[X]$ in irgendeinem explizierbaren Sinn ähnlich zu $\mathrm{P}[X^*]$ ist? Daß Ω eine Teilmenge von Ω^* ist, liefert natürlich überhaupt kein Argument. Und ebenfalls hilft hier die Überlegung nicht weiter, daß man manchmal versuchen kann, Ω als eine Zufallsstichprobe aus einer Obermenge Ω^* zu bilden. Denn eine notwendige Voraussetzung bestünde darin, daß Ω^* eine definite Gesamtheit ist, deren Mitglieder sich in unserer Erfahrungswelt zum Zeitpunkt der Stichprobenziehung identifizieren lassen. Selbst wenn man also hypothetische Verallgemeinerungen mit Verfahren der Stichprobenbildung begründen könnte,[28] würde man auf diesem Weg nicht zu den probabilistischen Gesetzen gelangen können, die Hempel in irreführender Analogie zu All-Aussagen über Individuen vorstellbar zu machen versucht.

9.3.4 Bezugnahme auf Zufallsgeneratoren

1. Ein möglicher Ausweg aus der begrifflichen Sackgasse besteht darin, daß man sich zur Einführung des Redens von Wahrscheinlichkeiten nicht auf relative Häufigkeiten in Referenzklassen bezieht, sondern auf Zufallsgeneratoren, so wie dies in Kap. 4 vorgeschlagen worden ist. Der wesentliche Unterschied zum Ansatz der Statistik, die sich mit relativen Häufigkeiten in endlichen Gesamtheiten beschäftigt, besteht darin, daß man sich durch die Konzeption eines Zufallsgenerators eine Vorstellung über Eigenschaften von Prozessen machen kann, durch die Sachverhalte (oder Ereignisse) entstehen. Folgendes Bild kann noch einmal an den Grundgedanken erinnern:

$$\text{Aktivierung} \rightarrow \boxed{\mathcal{G}} \rightarrow \omega$$

$\mathcal{G}$ symbolisiert den Zufallsgenerator, der beliebig oft aktiviert werden kann und bei jeder Aktivierung eine Situation ω erzeugt, die durch einen Wert in einem Merkmalsraum $\tilde{\mathcal{X}}$ charakterisiert werden kann. Wie in Abschnitt 4.3.1 ausgeführt worden ist, kann man sich $\tilde{\mathcal{X}}$ auch als Merkmalsraum einer Zufallsvariablen $\dot{X}$ vorstellen, deren Werte durch die Aktivierung des Zufallsgenerators entstehen. So kann man davon sprechen, daß jede Aktivierung von $\mathcal{G}$ eine Realisierung $\dot{X}(\omega) \in \tilde{\mathcal{X}}$ liefert.

2. In diesem Kontext haben Wahrscheinlichkeitsaussagen den Sinn, die Funktionsweise eines Zufallsgenerators zu charakterisieren. Ein Zufallsgenerator $\mathcal{G}$ wird durch ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\Pr[\mathcal{G}]$ charakterisiert,

[28] Zu den Problemen, die mit dieser Idee verbunden sind, vgl. man unsere „Grundzüge“, Teil IV.

das jeder Merkmalsmenge $\tilde{X} \subseteq \tilde{\mathcal{X}}$ eine Wahrscheinlichkeit $\Pr[\mathcal{G}](\tilde{X})$ zuordnet. Wichtig ist nun, daß man in diesem Kontext auch eine sinnvolle Explikation für die Vorstellung eines „probabilistischen Gesetzes“ gewinnen kann: Es bezeichnet das Wahrscheinlichkeitsmaß $\Pr[\mathcal{G}]$, das die Funktionsweise des Zufallsgenerators $\mathcal{G}$ charakterisiert. Der Gedanke wurde bereits in Abschnitt 5.1 bei der Erörterung des Ausdrucks ‘Verteilungsgesetz’ erwähnt. Von einem „Gesetz“ kann man hier deshalb in sinnvoller Weise sprechen, weil das Wahrscheinlichkeitsmaß angibt, wie der Zufallsgenerator funktionieren *soll*. Ein Verteilungsgesetz beschreibt nicht, wie reale Prozesse ablaufen, sondern drückt *eine Vorschrift* aus, *nach der ein Zufallsgenerator funktionieren soll*. Insofern man realen Prozessen, wenn überhaupt, nur in unvollständiger Weise vorschreiben kann, wie sie ablaufen sollen, ist auch klar, daß sich die Idee eines Verteilungsgesetzes auf ein Modell bezieht. Das gilt natürlich auch für Zufallsgeneratoren. Es handelt sich um eine Vorstellung, die zunächst in der Welt mathematischer Modelle angesiedelt ist. Gleichwohl kann man reale Zufallsgeneratoren konstruieren, die ihrem Modell weitgehend entsprechen, z. B. Maschinen. Dann hat sich ihr Konstrukteur zum Gesetzgeber gemacht, der einer Maschine durch ein Gesetz vorschreibt, wie sie sich verhalten soll, und man kann – soweit die Maschine ihrem Gesetz folgt – davon sprechen, daß sie durch ein Gesetz „beherrscht“ wird.

3. Überlegen wir jetzt, ob sich die Vorstellung eines Verteilungsgesetzes für Zufallsgeneratoren in irgendeiner sinnvollen Weise mit Vorstellungen über All-Aussagen verbinden läßt. Im vorangegangenen Abschnitt haben wir uns mit der von Hempel verwendeten Formulierung

$$p(F, G) = r \tag{9.3.10}$$

beschäftigt und festgestellt, daß sie sich – wenn man von einem frequentistischen Verständnis des Wahrscheinlichkeitsbegriffs ausgeht – nicht als eine Aussage über individuelle Objekte oder Situationen formulieren läßt. Der gedankliche Rückgriff auf einen Zufallsgenerator erlaubt es jedoch, daß man sich auf durchaus sinnvolle Weise auch auf individuelle Vorkommnisse beziehen kann: Der Zufallsgenerator $\mathcal{G}$ wird aktiviert, und dadurch entsteht eine ganz bestimmte Situation ω mit einem ganz bestimmten Merkmalswert $\dot{X}(\omega)$. Auf diese Weise kann man sich hypothetisch auch auf Situationen beziehen, die mit einem Zufallsgenerator erzeugt werden könnten. Somit kann eine sinnvoll explizierbare Aussageform

$$E(\omega) := \begin{array}{l}\text{die Situation } \omega \text{ wird/wurde durch den}\\ \text{Zufallsgenerator } \mathcal{G} \text{ erzeugt}\end{array}$$

eingeführt werden. Allerdings macht es in diesem Fall keinen Sinn, die Extension E^* zu bilden, da man sich nicht sinnvoll auf die Menge aller Situationen beziehen kann, die mit einem Zufallsgenerator erzeugt werden könnten. Es wäre ein typisches Beispiel für eine Pseudo-Menge, so wie dieser Begriff in Abschnitt 9.3.2 erläutert worden ist.[29]

4. Zu überlegen bleibt, was man über eine Situation ω aussagen kann, wenn man weiß, daß $E(\omega)$ zutrifft, wenn man also weiß, daß ω durch den Zufallsgenerator $\mathcal{G}$ entstanden ist oder entstehen wird. Offenbar kann man bestenfalls Hypothesen bilden und versuchen, sie mit epistemischen Wahrscheinlichkeitsaussagen einschätzbar zu machen. Eine dafür geeignete Schreibweise wurde bereits in Abschnitt 4.2.2 eingeführt, nämlich $\langle\, \omega, \tilde{X}\,\rangle$, womit die Hypothese gemeint ist, daß sich eine Situation ω durch einen Merkmalswert in einer Merkmalsmenge $\tilde{X} \subseteq \tilde{\mathcal{X}}$ charakterisieren läßt. Wenn man nun weiß, daß eine Situation ω durch einen Zufallsgenerator $\mathcal{G}$ entstanden ist oder entstehen wird, liefert das aleatorische Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathrm{Pr}[\mathcal{G}]$, das den Zufallsgenerator $\mathcal{G}$ charakterisiert, auch eine Möglichkeit, ein epistemisches Wahrscheinlichkeitsmaß zur Einschätzung von Hypothesen der Art $\langle\, \omega, \tilde{X}\,\rangle$ zu definieren:

$$\mathrm{P_e}(\langle\, \omega, \tilde{X}\,\rangle) \;:=\; \mathrm{Pr}[\mathcal{G}](\tilde{X}) \tag{9.3.11}$$

Gestützt auf diese Definition kann man schließlich folgende All-Aussage formulieren:

$$\forall\, \omega : \; E(\omega) \;\rightarrow\; (\mathrm{P_e}(\langle\, \omega, \tilde{X}\,\rangle) = \mathrm{Pr}[\mathcal{G}](\tilde{X})) \tag{9.3.12}$$

Sie ist natürlich trivialerweise richtig, da sie aus der Definition (9.3.11) folgt. Es handelt sich um eine Variante der All-Aussagen, deren Begründung sich aus vorausgesetzten Regeln ergibt (vgl. Abschnitt 9.3.2). Dem entspricht, daß zur Interpretation der Aussage (9.3.12) keine Bezugnahme auf eine Extension E^* erforderlich ist. Dennoch ist die Aussage nicht sinnlos, denn sie bringt explizit zum Ausdruck, daß die Definition (9.3.11) voraussetzt, daß sich die Hypothese auf eine Situation bezieht, die durch einen Zufallsgenerator $\mathcal{G}$ entstanden ist.

5. In dieser Voraussetzung liegt der entscheidende Unterschied zwischen dem hier vorgeschlagenen Verständnis probabilistischer Gesetze und Vorschlägen, die ausgehend von einer frequentistischen Deutung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs an die Formulierung (9.3.10) anknüpfen. Zwar können auch statistische Aussagen über Häufigkeitsverteilungen in einer Gesamtheit Ω verwendet werden, um Argumente für epistemische Wahrscheinlichkeitsaussagen über Hypothesen der Form $\langle\, \omega, \tilde{X}\,\rangle$ zu liefern. Dafür muß jedoch vorausgesetzt werden, daß das Objekt oder die Situation ω ein Element der Gesamtheit Ω ist, auf die sich die statistische Aussage bezieht. Dann kann man in Analogie zu (9.3.11) ein epistemisches Wahrscheinlichkeitsmaß durch

$$\mathrm{P_e}(\langle\, \omega, \tilde{X}\,\rangle) \;:=\; \mathrm{P}[X](\tilde{X}) \tag{9.3.13}$$

[29] Man vgl. hierzu auch Abschnitt 6.3.2.

definieren, wobei X eine für Ω definierte statistische Variable ist. Dieser Fall ist jedoch praktisch bedeutungslos und entspricht auch gerade nicht der Intention, die mit einer Formulierung probabilistischer Gesetze in der Form (9.3.10) verfolgt werden soll. Diese Intention besteht vielmehr darin, daß man Hypothesen über Objekte oder Situationen einschätzbar machen möchte, die keine Elemente derjenigen Objektmenge sind, für die man einen statistischen Sachverhalt festgestellt hat. Wie wir schon mehrfach besprochen haben, führt jedoch im allgemeinen kein sinnvoller Weg von statistischen Aussagen über eine Objektmenge Ω zu statistischen Aussagen über beliebige Obermengen Ω^*, da aus der Inklusion $\Omega \subset \Omega^*$ keinerlei Schlußfolgerung gezogen werden kann, weder über einzelne Elemente von $\Omega^* \backslash \Omega$, noch über Häufigkeitsverteilungen in Ω^*.

6. Infolgedessen führen Überlegungen, die an der Formulierung (9.3.10) anknüpfen, grundsätzlich in eine Sackgasse. Exemplarisch sichtbar wird diese Sackgasse bei H. Reichenbach, der das Problem sehr deutlich erkannt hat und – weil es nicht lösbar ist – schließlich versucht, sich auf ein Prinzip der „statistischen Induktion“ zu berufen:

> „There remains only one rule to be used in order to make the calculus of probability applicable to empirical research: the rule of induction. It advises us to find probabilities in actual observations by regarding an observed frequency as the best posit we can make for the limit of the frequency resulting when the sequence is continued.“ (Reichenbach 1951, S. 126)

Diese Induktionsregel ist jedoch sicherlich nicht sinnvoll, wie man sich an beliebig vielen Beispielen verdeutlichen kann. Denn sie läuft faktisch darauf hinaus, jeweils diejenigen statistischen Häufigkeiten, die man für irgendeine Gesamtheit Ω ermittelt hat, als Näherungen für andere Häufigkeiten zu betrachten, die man in anderen Gesamtheiten Ω^* finden würde, wenn man sie ermitteln könnte. Exemplarisch kann man an den in Abschnitt 8.2.2 zitierten Vorschlag von E. Nagel denken, aus den in vier aufeinanderfolgenden Jahren ermittelten Häufigkeiten für Todesfälle hypothetisch ein probabilistisches Gesetz mit einem allgemeinen Geltungsanspruch zu machen. Das ist absurd.

7. Die entscheidende Schwäche eines frequentistischen Ansatzes, der sich an der Formulierung (9.3.10) orientiert, besteht darin, daß keinerlei explizite Vorstellungen über die Prozesse gebildet werden, durch die Objekte oder Situationen jeweils spezifische Eigenschaften bekommen. Demgegenüber besteht der Grundgedanke eines Ansatzes der Wahrscheinlichkeitstheorie bei Zufallsgeneratoren gerade darin, daß man sich auf das Zustandekommen von Situationen und ihren Eigenschaften bezieht. In der Formulierung (9.3.12) kommt dies in der Bedingung $E(\omega)$ zum Ausdruck. Es erscheint auch evident: Wenn man nicht weiß, wie ein Sachverhalt entstanden ist oder entstehen könnte, hat man keinerlei Anhaltspunkt, um Hypothesen über seine Beschaffenheit einschätzbar zu machen. Als Beispiel kann man daran denken, daß auf dem Tisch, zunächst verdeckt, ein Würfel liegt und daß eine Hypothese über dessen obenliegende Augenzahl durch eine epistemische Wahrscheinlichkeit bewertet werden soll. Wenn man nicht voraussetzen kann, daß der Würfel seine Lage durch einen vorausgegangenen Wurf bekommen hat, sondern gleichermaßen möglich ist, daß er irgendwie auf den Tisch gelegt worden ist, liefert die Wahrscheinlichkeitstheorie überhaupt keine Gesichtspunkte, um zu Wahrscheinlichkeitsaussagen zu gelangen. Insofern ist die Voraussetzung $E(\omega)$ von entscheidender Bedeutung, um Begriffsbildungen und Überlegungen einer quantitativen Wahrscheinlichkeitstheorie sinnvoll anwenden zu können.

8. Die Überlegungen sollten gezeigt haben, wie man den Begriff eines probabilistischen Gesetzes durch gedanklichen Rückgriff auf Zufallsgeneratoren explizieren kann. Eine entscheidende Sinnvoraussetzung besteht allerdings darin, daß die Annahme, daß Sachverhalte oder Ereignisse durch einen Zufallsgenerator zustande kommen, begründet werden kann. Möglich erscheint dies, wenn man sich auf Maschinen und generell schematisch wiederholbare Verfahren beziehen kann. In der empirischen Sozialforschung führt jedoch die Annahme, daß soziale Sachverhalte und Ereignisse durch Zufallsgeneratoren zustande kommen, in eine theoretische Sackgasse. Sicherlich könnte man sich, wie in der probabilistischen Sozialstatistik, auf *fiktive* Zufallsgeneratoren beziehen. Aber im Unterschied zu Prozessen, die man tatsächlich als Realisationen von Zufallsgeneratoren deuten kann, liefert eine bloße Fiktion natürlich keinen Erkenntnisgewinn. Im Gegenteil verhindert dieser Ansatz, daß man einen Zugang zu dem theoretischen Problem der empirischen Sozialforschung finden kann, das im wesentlichen darin besteht, wie man sich adäquate Bilder von sozialen Prozessen und ihrer Funktionsweise machen kann.

9.3.5 Erhält man Erklärungen?

1. Zum Abschluß soll noch einmal auf das Schema der „induktiv-statistischen Erklärung“ eingegangen werden, auf das in Abschnitt 9.3.3 anhand eines Zitats aus dem Lehrbuch von Schnell, Hill und Esser bereits hingewiesen wurde. Ursprünglich wurde der Vorschlag von C. G. Hempel (1965, S. 376ff) entwickelt, um eine Variante seiner Idee nomologischer Erklärungen auf Bereiche ausdehnen zu können, in denen es keine nomologischen Gesetze gibt. Um eine gedankliche Parallele herzustellen, dient folgende Behauptung:

„Ultimately, however, statistical laws are meant to be applied to particular occurrences and to establish explanatory and predictive connections among them.“ (Hempel 1965, S. 381)

Aber schon diese Behauptung ist zumindest fragwürdig. Denn weder statistische noch probabilistische Begriffsbildungen dienen in erster Linie einer Reflexion von Hypothesen über das Auftreten einzelner Sachverhalte oder Ereignisse. Vielmehr haben statistische Begriffsbildungen ihren primären Sinn darin, zu Aussagen, Darstellungen und Charakterisierungen von Häufigkeitsverteilungen in empirisch fixierbaren Gesamtheiten zu gelangen; und probabilistische Begriffsbildungen haben in erster Linie den Zweck, zu Aussagen über Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu gelangen, um Einsichten in die Funktionsweise von Zufallsgeneratoren (Maschinen, Verfahren, ...) zu bekommen. Exemplarisch zeigt sich dies in der dominierenden Rolle, die der Begriff eines (bedingten) Mittelwerts sowohl in der Statistik als auch in der Wahrscheinlichkeitstheorie einnimmt.

2. Das Schema einer „induktiv-statistischen Erklärung“ ist dagegen hauptsächlich nur deshalb von Interesse, weil es zeigt, wie die Idee einer nomologischen Erklärung grundsätzlich in eine theoretische Sackgasse führt. Exemplarisch beziehen wir uns auf das von Schnell, Hill und Esser angegebene Beispiel (Abschnitt 9.3.3). Angenommen, die Überlegung bezieht sich auf eine Person ω, deren Einkommen 3200 DM beträgt (so daß die Aussage $\tilde{e}(\omega)$ wahr ist). Gäbe es ein nomologisches Gesetz

$$\forall\, \omega : \; \tilde{e}(\omega) \rightarrow \tilde{o}(\omega) \tag{9.3.14}$$

könnte aus der Tatsache, daß die Person ω ein Einkommen von mehr als 3000 DM bezieht, die Schlußfolgerung gezogen werden, daß sie auch regelmäßig in die Oper geht ($\tilde{o}(\omega)$). Aber ein solches Gesetz gibt es natürlich nicht, so daß die Idee, das Explanandum aus gewissen Voraussetzungen *logisch ableiten* zu können, schon aus diesem Grund versagt. Mit dem I-S-Schema soll nun versucht werden, diese Konsequenz dadurch zu vermeiden, daß als Argumentationsvoraussetzung anstelle von (9.3.14) eine statistische Aussage der Gestalt

$$\mathrm{P}[Y|X > 3000](\{\tilde{y}_1\} \;=\; 0.9 \tag{9.3.15}$$

verwendet wird. Wenn man nun wüßte, daß ω zu der Gesamtheit Ω gehört, auf die sich die in (9.3.15) verwendeten Variablen (X, Y) beziehen, könnte man diese statistische Information sicherlich im Rahmen von Überlegungen verwenden, die sich auf die epistemische Wahrscheinlichkeit der Hypothese $\langle\, \omega, \tilde{o}(\omega)\,\rangle$ beziehen. Zum Beispiel könnte man vermuten, daß die Hypothese, daß ω regelmäßig die Oper besucht, wahrscheinlicher ist als die gegenteilige Hypothese. Ob es auch Sinn machen könnte, die epistemische Wahrscheinlichkeit durch Verweis auf eine statistische Häufigkeit zu quantifizieren, wie mit dem I-S-Schema vorgeschlagen wird, kann dabei offen bleiben.[30]

[30] In dem in Abschnitt 9.3.3 angeführten Zitat von Schnell, Hill und Esser sprechen die Autoren davon, daß es „rational“ sei, empirisch ermittelte Häufigkeiten zur Quantifizierung epistemischer Wahrscheinlichkeiten zu verwenden. Das kann jedoch leicht bestritten werden, denn sicherlich sollte man in erster Linie auf die besonderen Umstände

3. Viel wichtiger ist nämlich, daß offenbar eine Verwechslung vorliegt, wenn in diesem Zusammenhang von einer Erklärung gesprochen wird. Denn der Versuch, die epistemische Wahrscheinlichkeit einer Hypothese $\langle\, \omega, \tilde{o}(\omega)\, \rangle$ einschätzbar zu machen, hat ersichtlich nichts mit der Frage zu tun, wie man erklären könnte, daß ω regelmäßig in die Oper geht. Sobald man sich jedoch auf diese Frage bezieht, wird auch deutlich, daß man mit dem I-S-Schema keinerlei Anhaltspunkt für eine Erklärung bekommt. Denn angenommen, man wüßte, daß ω regelmäßig in die Oper geht. Es erscheint evident, daß dies nicht dadurch erklärt werden kann, daß ω's Einkommen 3200 DM beträgt. Aber auch die statistische Aussage (9.3.15) kann natürlich zu einer Erklärung nichts beitragen, denn ω könnte auch zu denjenigen gehören, die zwar mehr als 3000 DM Einkommen beziehen, aber nicht regelmäßig in die Oper gehen; und wie wäre dann dieser Sachverhalt zu erklären? Es ist auch bemerkenswert, daß dieses Argument vollständig unabhängig von der Frage gilt, welchen Umfang die Gesamtheit Ω hat, auf die sich die Aussage (9.3.15) bezieht. Selbst wenn es gelingen könnte, aus ihr eine indefinite Aussage zu machen, die sich auf „alle Menschen" bezieht (was, wie wir gesehen haben, schon aus begrifflichen Gründen nicht möglich ist), würde sich an dem Argument nichts ändern.

4. Die Vorstellung, daß man mit statistischen Aussagen erklären könnte, warum bestimmte Personen bestimmte Eigenschaften aufweisen, muß deshalb als irreführend bezeichnet werden. Besonders irreführend wird diese Vorstellung, wenn man sie, wie Hempel vorgeschlagen hat, mit der Idee verknüpft, daß statistische Aussagen als eine Variante nomologischer Gesetze interpretiert werden könnten. Dieser Gedanke, der zum erstenmal von A. Quetelet verbreitet worden ist, würde implizieren, daß statistisch ermittelbare Häufigkeitsverteilungen den Mitgliedern einer Gesellschaft vorschreiben könnten, welche Eigenschaften sie haben und wie sie sich verhalten sollten. Der Gedanke ist natürlich absurd. Aber man sollte darauf achten, daß er nicht weniger absurd wird, wenn man die Rhetorik verändert und relative Häufigkeiten als „Chancen" oder „Risiken" anspricht. Daß diese Rhetorik in eine theoretische Sackgasse führt, wurde bereits in Kap. 7 am Beispiel von W. Lexis diskutiert. Als ein aktuelleres Beispiel kann ein Gedankengang von H. Esser angeführt werden. In seinem Lehrbuch der Soziologie (1993, S. 32) beschreibt Esser zunächst einen statistischen Sachverhalt, nämlich den Anstieg der Scheidungsraten seit etwa 1960 (mit einem vorübergehend deutlichen Rückgang Ende der 1970er Jahre).[31] Dann wird folgende Aussage formuliert:

der jeweils vorliegenden Situation achten. Aber es ist natürlich weder die Aufgabe der empirischen Sozialforschung noch die ihrer Methodenlehre, irgendwelche Rationalitätskriterien zu propagieren.

[31] Anhand dieses Beispiels kann man sich auch noch einmal die Unhaltbarkeit des Reichenbachschen Prinzips einer „statistischen Induktion" überlegen, auf das in Abschnitt 9.3.4 hingewiesen worden ist.

„Wer 1985 eine Ehe einging, unterlag – ob er das wollte oder nicht – einem strukturell vorgegebenen höheren Risiko einer Ehescheidung als jemand im Jahr 1960." (Esser 1993, S. 35)

Man kann vermuten, daß Esser hierbei an eine Variante des I-S-Schemas gedacht hat, das es scheinbar erlaubt, ausgehend von statistischen Sachverhalten Eigenschaften oder Verhaltensweisen von Objekten, in diesem Fall von Menschen, zu erklären.

5. Bezieht man sich auf Zufallsgeneratoren, könnte man ein I-S-Schema konzipieren, bei dem als Prämisse probabilistische Gesetze auftreten. Als Beispiel betrachten wir in Analogie zum I-S-Schema von Schnell, Hill und Esser einen Zufallsgenerator $\mathcal{G}$ mit dem Merkmalsraum $\tilde{\mathcal{X}} := \{0, 1\}$ und der Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$\Pr[\mathcal{G}](\{0\}) = 0.1 \quad \text{und} \quad \Pr[\mathcal{G}](\{1\}) = 0.9$$

Man kann sich vorstellen, daß dieser Zufallsgenerator von Menschen benutzt wird, um zu entscheiden, ob sie sich ein Abonnement für die Oper kaufen sollen (1) oder nicht (0). Wenn jeweils zum Saisonbeginn all diejenigen, die mehr als 3000 DM Einkommen erzielen, diesen Zufallsgenerator um Rat fragen, wird eine nachfolgende statistische Untersuchung zeigen, daß etwa 90 % von ihnen sich ein Opernabonnement gekauft haben. Aber beziehen wir uns jetzt auf eine bestimmte Person ω, für die $\tilde{e}(\omega)$ zutrifft und die infolgedessen den Zufallsgenerator um Rat gefragt hat. Könnte man die Antwort, die der Zufallsgenerator dieser Person gegeben hat, mit dessen Wahrscheinlichkeitsverteilung erklären? Angenommen, der Zufallsgenerator hat den Rat erteilt, daß ω sich ein Opernabonnement kaufen soll. Auf die Frage, warum ω in der betreffenden Saison zu einem regelmäßigen Opernbesucher geworden ist, könnte man dann antworten, daß dies durch den Zufallsgenerator „entschieden" worden ist. Aber ganz genauso müßte die Antwort aussehen, wenn ω den Rat erhalten hätte, sich kein Opernabonnement zu kaufen. In jedem Fall könnte man nur sagen, daß das Verhalten von ω, ob nun in der einen oder der anderen Weise, daraus resultiert, wie sich der Zufallsgenerator in diesem Fall „entschieden" hat. Wäre das eine Erklärung? Wenn sich der Vorgang tatsächlich so abgespielt hat, wie in diesem Beispiel angenommen worden ist, müßte die Frage wohl bejaht werden. Denn man weiß dann, soweit dies möglich ist, wie es dazu gekommen ist, daß ω zu einem regelmäßigen Opernbesucher oder auch nicht zu einem regelmäßigen Opernbesucher geworden ist. Weitergehende Fragen, etwa warum sich der Zufallsgenerator bei ω in der einen Weise und bei einer anderen Person ω' in einer anderen Weise „entschieden" hat, wären offenbar sinnlos.

6. Anhand dieses Beispiels wird auch noch einmal die prinzipielle Schwäche des Ansatzes einer probabilistischen Sozialstatistik deutlich. Wenn ein empirischer Sozialforscher herausfinden würde, daß Menschen, deren Einkommen mehr als 3000 DM beträgt, sich für oder gegen den Kauf eines

Opernabonnements durch die Befragung eines Zufallsgenerators entscheiden, wäre das sicherlich eine bemerkenswerte Entdeckung; und gestützt auf eine solche Entdeckung könnte man dann erklären, warum z. B. 90 % dieser Menschen zu regelmäßigen Opernbesuchern geworden sind. Tatsächlich ist diese Entdeckung jedoch bisher noch nicht gemacht worden. Die durch die probabilistische Sozialstatistik unterstellten Zufallsgeneratoren sind vielmehr rein fiktiver Natur, so daß sie auch keinerlei Beitrag zu einer Erklärung der jeweils beobachteten statistischen Häufigkeitsverteilungen liefern können. Ihre Unterstellung hat tatsächlich einen genau entgegengesetzen Sinn: nämlich die Frage, wie und warum soziale Sachverhalte und Ereignisse entstehen, auszublenden. Soweit sich die Sozialforschung für diese Frage interessiert, kann sie deshalb dem Ansatz einer probabilistischen Sozialstatistik nicht folgen.

Literatur

Alterman, H. 1969. Counting People. The Census in History. New York: Harcourt, Brace & World.

Altschul, E. 1913. Studie über die Methode der Stichprobenerhebung. Ein Beitrag zur Charakteristik der modernen Strömungen in der theoretischen Statistik. Archiv für Rassen- und Gesellschaftsbiologie 10, 110–157.

Anderson, O. 1935. Einführung in die mathematische Statistik. Wien: Julius Springer.

Anderson, O. 1947. Zum Problem der Wahrscheinlichkeit a posteriori in der Statistik. Schweizerische Zeitschrift für Volkswirtschaft und Statistik 83, 489–518.

Anderson, O. 1961. Das „Als Ob“ in der statistischen Methodenlehre. Studi in Onore di Corrado Gini, I, 43–51. Reprint in: Ausgewählte Schriften, Band 2, 952–960. Tübingen: Mohr 1963.

Anderson, O. 1957. Probleme der statistischen Methodenlehre in den Sozialwissenschaften. Würzburg: Physica-Verlag.

Anderson, O. 1963. Ausgewählte Schriften. 2 Bände. Tübingen: Mohr.

Applebaum, D. 1996. Probability and Information. Cambridge: Cambridge University Press.

Aristoteles 1987. Aristoteles’ Physik. 1. Halbband, Bücher I – IV. Übers. von H. G. Zekl. Hamburg: Meiner.

Balzer, W. 1997. Die Wissenschaft und ihre Methoden. Grundsätze der Wissenschaftstheorie. München: Alber.

Bartha, P., Johns, R. 2001. Probability and Symmetry. Philosophy of Science 68 (Proceedings), 109–122.

Beckermann, A. 1975. Einige Bemerkungen zur statistischen Kausalitätstheorie von P. Suppes. Zeitschrift für allgemeine Wissenschaftstheorie 6, 292–310.

Bennett, D. J. 1998. Randomness. Cambridge: Harvard University Press.

Berger, P. L. 1963. Einladung zur Soziologie. Eine humanistische Perspektive. München: DTV 1977.

Bernert, C. 1983. The Career of Causal Analysis in American Sociology. British Journal of Sociology 34, 230–254.

Bernoulli, J. 1713. Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars conjectandi). Dt. Übers. von R. Haussner, Leipzig 1899. Reprint Frankfurt: H. Deutsch 1999.

Billingsley, P. 1979. Probability and Measure. New York: Wiley.

Blalock, H. M. 1972. Social Statistics. London: McGraw-Hill.

Bocheński, J. M. 1996. Formale Logik. 5. Aufl. Freiburg: Alber.

Bonß, W. 1982. Die Einübung des Tatsachenblicks. Zur Struktur und Veränderung empirischer Sozialforschung. Frankfurt: Suhrkamp.

Boole, G. 1952. Studies in Logic and Probability. La Salle, Ill.: Open Court.

Boole, G. 1997. Selected Manuscripts on Logic and Its Philosophy. Hrsg. von I. Grattan-Guinness, G. Bornet. Basel: Birkhäuser.

Bortkiewicz, L. v. 1898. Das Gesetz der kleinen Zahlen. Leipzig: Teubner.

Bortkiewicz, L. v. 1917. Die Iterationen. Ein Beitrag zur Wahrscheinlichkeitstheorie. Berlin: Springer-Verlag.

Bortz, J., Döring, N. 1995. Forschungsmethoden und Evaluation für Sozialwissenschaftler. Berlin: Springer-Verlag.

Bowley, A. L. 1926. Elements of Statistics. 5th ed. London: King & Son.

Braithwaite, R. B. 1955. Scientific Explanation. A Study of the Function of Theory, Probability and Law in Science. Cambridge: Cambridge University Press.

Bruns, H. 1906. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmasslehre. Leipzig: Teubner.

Burgdörfer, F. (Hg.) 1940. Die Statistik in Deutschland nach ihrem heutigen Stand. 2 Bände. Berlin: Verlag für Sozialpolitik, Wirtschaft und Statistik.

Cahn, S. M. 1967. Fate, Logic, and Time. New Haven: Yale University Press.

Carlsson, G. 1951. Sampling, Probability and Causal Inference. Theoria 17, 139–154.

Carnap, R. 1962. Logical Foundations of Probability. 2nd ed. Chicago: University of Chicago Press.

Carnap, R., Stegmüller, W. 1959. Induktive Logik und Wahrscheinlichkeit. Wien: Springer-Verlag.

Cohen, J. B. 1938. The Misuse of Statistics. Journal of the American Statistical Association 33, 657–674.

Coolidge, J. L. 1927. Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Leipzig: Teubner.

Cox, D. R., Snell, E. J. 1981. Applied Statistics. Principles and Examples. London: Chapman & Hall.

Czuber, E. 1908. Wahrscheinlichkeitsrechnung. Band 1: Wahrscheinlichkeitstheorie, Fehlerausgleichung, Kollektivmasslehre. Leipzig: Teubner.

Czuber, E. 1921. Die statistischen Forschungsmethoden. Wien: Seidel.

Czuber, E. 1923. Die philosophischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Leipzig: Teubner.

d'Alembert, J. 1756. Artikel „Experimentell". In: Artikel aus der von Diderot und d'Alembert herausgegebenen Enzyklopädie, 433–437. Hrsg. von M. Naumann. Frankfurt: Röderberg 1984.

Daston, L. 1988. Classical Probability in the Enlightenment. Princeton: Princeton University Press.

Dempster, A. P. 1987. Probability and the Future of Statistics. In: I. B. MacNeill, G. J. Umphrey, eds., Foundations of Statistical Inference, 1–7. Dordrecht: Reidel.

de Finetti, B. 1972. Probability, Induction and Statistics. New York: Wiley.

De Morgan, A. 1838. An Essay on Probabilities and On Their Application to Life Contingencies and Insurance Offices. London: Longman.

Diekmann, A. 1995. Empirische Sozialforschung. Grundlagen, Methoden, Anwendungen. Reinbek: Rowohlt.

Doob, J. L. 1953. Stochastic Processes. New York: Wiley.

Durkheim, E. 1897. Der Selbstmord. Frankfurt: Suhrkamp 1973.

Edgeworth, F. Y. 1908. On the Probable Errors of Frequency-Constants. Journal of the Royal Statistical Society 71, 381–397, 499–512, 651–678.

Elderton, W. P. 1938. Frequency Curves and Correlation. 3rd ed. Cambridge: Cambridge University Press.

Ellis, R. L. 1849. On the Foundations of the Theory of Probabilities. Transactions of the Cambridge Philosophical Society 8, 1–6.

Esser, H. 1993. Soziologie. Allgemeine Grundlagen. Frankfurt: Campus.

Fahrmeir, L., Künstler, R., Pigeot, I., Tutz, G. 1999. Statistik. Der Weg zur Datenanalyse. Berlin: Springer-Verlag.

Fechner, G. T. 1897. Kollektivmasslehre. Hrsg. von G. F. Lipps. Leipzig: Engelmann.

Fishburn, P. C. 1986. The Axioms of Subjective Probability (with Discussion). Statistical Science 1, 335–358.

Fisher, R. A. 1928. The Mathematical Theory of Probabilities and Its Application to Frequency Curves and Statistical Methods, 2nd ed. New York: Macmillan.

Fisher, R. A. 1922. On the Mathematical Foundations of Theoretical Statistics. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Vol. 222, 309–368.

Fisher, R. A. 1955. Statistical Methods and Scientific Induction. Journal of the Royal Statistical Society B 17, 69–78.

Fisher, R. A. 1966. The Design of Experiments, 8th ed. New York: Hafner Publ.

Fisher, R. A. 1973. Statistical Methods and Scientific Inference. 3rd ed. New York: Hafner Press.

Forcher, H. 1913. Die statistische Methode als selbständige Wissenschaft: Leipzig: Veit & Comp.

Freedman, D. 1985. Statistics and the Scientific Method. In: W. M. Mason, S. E. Fienberg, eds., Cohort Analysis in Social Research, 343–366. New York: Springer-Verlag.

Freedman, D. 1997. Some Issues in the Foundation of Statistics. In: B. C. van Fraassen, ed., Topics in the Foundations of Statistics, 19–39. Dordrecht: Kluwer.

Frege, G. 1879. Begriffsschrift. Halle: L. Nebert. Reprint: Georg Olms Verlag 1998.

Frege, G. 1990. Schriften zur Logik und Sprachphilosophie. 3. Aufl. Hrsg. von G. Gabriel. Hamburg: Felix Meiner.

Freudenthal, H. 1963. Wahrscheinlichkeit und Statistik. München: Oldenbourg.

Fry, T. C. 1928. Probability and Its Engineering Uses. New York: van Nostrand.

Furlan, L. V. 1946. Das Harmoniegesetz der Statistik. Eine Untersuchung über die metrische Interdependenz der sozialen Erscheinungen. Basel: Verlag für Recht und Gesellschaft.

Galton, A. 1984. The Logic of Aspect. Oxford: Clarendon.

Galton, F. 1889. Natural Inheritance. London: Macmillan.

Galton, F. 1908. Inquiries into Human Faculty and Its Development, 2nd ed. London and New York. Reprint by AMS Press, New York 1973.

Giere, R. N. 1999. Science without Laws. Chicago: University of Chicago Press.

Gigerenzer, G., Swijtink, Z., Porter, T., Daston, L., Beatty, J., Krüger, L. 1989. The Empire of Chance. How Probability Changed Science and Everyday Life. Cambridge: Cambridge University Press.

Gnedenko, B. W. 1991. Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie. Berlin: Akademie-Verlag.

Goldthorpe, J. H. 2000. On Sociology. Numbers, Narratives, and the Integration of Research and Theory. Oxford: Oxford University Press.

Gottinger, H. W. 1980. Elements of Statistical Analysis. Berlin: de Gruyter.

Gumbel, E. J. 1978. Bortkiewicz, Ladislaus von. In: W. H. Kruskal, J. M. Tanur, eds., International Encyclopedia of Statistics, Vol. 1, 24–27. New York: Free Press.

Hacker, P. M. S. 1982. Events and Objects in Space and Time. Mind 91, 1–19.

Hacking, I. 1965. Logic of Statistical Inference. Cambridge: Cambridge University Press.

Hacking, I. 1971. Equipossibility Theories of Probability. British Journal for the Philosophy of Science 22, 339–355.

Hagood, M. J. 1941. Statistics for Sociologists. New York: Henry Holt & Comp.

Hagood, M. J., Price, D. O. 1952. Statistics for Sociologists. Revised Ed. New York: Holt, Rinehart and Winston.

Hedström, P., Swedberg, R. (eds.) 1998. Social Mechanisms. An Analytical Approach to Social Theory. Cambridge: Cambridge University Press.

Heidelberger, M. 1987. Fechner's Indeterminism: From Freedom to Laws of Chance. In: L. Krüger, L. J. Daston, M. Heidelberger, eds., The Probabilistic Revolution, I, 117–156. Cambridge: MIT Press.

Helm, G. 1902. Die Wahrscheinlichkeitslehre als Theorie der Collectivbegriffe. Annalen der Naturphilosophie 1, 364–381.

Hempel, C. G. 1965. Scientific Explanation. Essays in the Philosophy of Science. New York: Free Press.

Henry, N. W. 1997. Thoughts on the Concept and Application of Statistical Models. In: B. C. van Fraassen, ed., Topics in the Foundations of Statistics, 63–67. Dordrecht: Kluwer.

Hochstädter, D. 1991. Statistische Methodenlehre. Ein Lehrbuch für Wirtschafts- und Sozialwissenschaftler. Frankfurt: Verlag H. Deutsch.

Huber, P. J. 1995. Zufall oder Unordnung. In: H. Rinne, B. Rüger, H. Strecker, Hg., Grundlagen der Statistik und ihre Anwendungen, 45–59. Heidelberg: Physica.

Jeffreys, H. 1948. Theory of Probability. 2nd ed. Oxford: Clarendon Press.

Jensen, A. 1926. Report on the Representative Method in Statistics. Proceedings of the International Statistical Institute 22, 359–451.

John, V. 1884. Geschichte der Statistik. Erster Teil: Von dem Ursprung der Statistik bis auf Quetelet (1835). Stuttgart: Enke. Reprint Wiesbaden: Sändig 1968.

John, V. 1895. Statistik und Probabilität. Allgemeines Statistisches Archiv 4, 1–46.

Johnson, N. L., Kotz, S. 1997. Leading Personalities in Statistical Science. From the Seventeenth Century to the Present. New York: Wiley.

Kant, I. 1800. Logik. In: Werke in 10 Bänden. Hrsg. von W. Weischedel, Band 5, 421–582. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft 1968.

Karup, W. 1885. Handbuch der Lebensversicherung. Leipzig: Fritsch.

Kendall, M., Stuart, A. 1977. The Advanced Theory of Statistics, Vol. 1, 4th ed. London: Charles Griffin & Comp.

Kerlinger, F. N. 1964. Foundations of Behavioral Research. New York: Holt, Rinehart and Winston.

Keynes, J. M. 1921. A Treatise on Probability. London: Macmillan.

Kiär, A. N. 1898. Die repräsentative Untersuchungsmethode. Allgemeines Statistisches Archiv 5, 1–22.

Knies, C. G. A. 1850. Die Statistik als selbständige Wissenschaft. Zur Lösung des Wirrsals in der Theorie und Praxis dieser Wissenschaft. Reprint Frankfurt: Sauer & Auvermann 1969.

Kolmogoroff, A. N. 1933. Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin: Springer-Verlag.

Kolmogorov, A. N. 1963. On Tables of Random Numbers. Sankhya A 25, 369–376.

Koopman, B. O. 1940. The Axioms and Algebra of Intuitive Probability. Annals of Mathematics 41, 269–292.

Kreyszig, E. 1968. Statistische Methoden und ihre Anwendungen. 3. Aufl. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Kries, J. von 1886. Die Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Freiburg: Mohr.

Krüger, L., Daston, L. J., Heidelberger, M. (eds.) 1987. The Probabilistic Revolution. Vol. 1. Cambridge: MIT Press.

Krüger, L., Gigerenzer, G., Morgan, M. S. (eds.) 1987. The Probabilistic Revolution. Vol. 2. Cambridge: MIT Press.

Kruskal, W., Mosteller, F. 1980. Representative Sampling IV: The History of the Concept in Statistics, 1895–1939. International Statistical Review 48, 169–195.

Laplace, P. S. de 1814. Philosophischer Versuch über die Wahrscheinlichkeit. Dt. Übers. hrsg. von R. v. Mises. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft 1932.

Lenzen, W. 1980. Glauben, Wissen und Wahrscheinlichkeit. Systeme der epistemischen Logik. Wien: Springer-Verlag.

Lexis, W. 1875. Einleitung in die Theorie der Bevölkerungsstatistik. Strassburg: Trübner.

Lexis, W. 1877. Theorie der Massenerscheinungen in der menschlichen Gesellschaft. Freiburg: Wagner'sche Buchhandlung.

Lexis, W. 1903. Abhandlungen zur Theorie der Bevölkerungs- und Moralstatistik. Jena: Fischer.

Lindner, R., Wohak, B., Zeltwanger, H. 1984. Planen, Entscheiden, Herrschen. Vom Rechnen zur elektronischen Datenverarbeitung. Reinbek: Rowohlt.

Lippert, P. 1910. Quetelet, Lambert Adolf Jakob. In: Handwörterbuch der Staatswissenschaften, 3. Aufl., Bd 6, 1277–1279. Jena: Fischer.

Lorenzen, P. 1974. Konstruktive Wissenschaftstheorie. Frankfurt: Suhrkamp.

Lorenzen, P. 1978. Konstruktive Deutung des Dualismus in der Wahrscheinlichkeitstheorie. Zeitschrift für allgemeine Wissenschaftstheorie 9, 256–275.

Lucas, J. R. 1970. The Concept of Probability. Oxford: Clarendon Press.

Makin, S. 1993. Indifference Arguments. Oxford: Blackwell.

Marschak, J. 1950. Statistical Inference in Economics. In: T. C. Koopmans, ed., Statistical Inference in Dynamic Economic Models, 1–50. New York: Wiley.

Martin-Löf, P. 1969. The Literature on von Mises' Kollektivs Revisited. Theoria 35, 12–37.

Mayer, K. U., Huinink, J. 1990. Alters-, Perioden- und Kohorteneffekte in der Analyse von Lebensverläufen oder: Lexis ade? In: K. U. Mayer, Hg., Lebensverläufe und sozialer Wandel, 442–459. Opladen: Westdeutscher Verlag.

Mayr, G. v. 1895. Statistik und Gesellschaftslehre. Band 1: Theoretische Statistik. Freiburg und Leipzig: Mohr.

Mayr, G. v. 1907. Die Berechtigung der „Moralstatistik". Allgemeines Statistisches Archiv 7, 1–20.

McGuigan, F. J. 1968. Experimental Psychology. A Methodological Approach. Englewood Cliffs: Prentice Hall.

Meyer, A. 1879. Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung. Dt. Übers. von E. Czuber. Leipzig: Teubner.

Mills, F. C. 1938. Statistical Methods Applied to Economics and Business. 2nd ed. New York: Holt and Comp.

Mises, R. v. 1931. Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik. Leipzig und Wien: Deuticke.

Mises, R. v. 1933. Über Zahlenfolgen, die ein kollektiv-ähnliches Verhalten zeigen. Mathematische Annalen 108, 757–772.

Mises, R. v. 1951. Positivism. A Study in Human Understanding. Transl. from first German edition, 1939. Cambridge: Harvard University Press. Neue dt. Ausgabe: Kleines Lehrbuch des Positivismus. Frankfurt: Suhrkamp 1990.

Mises, R. v. 1957. Probability, Statistics and Truth. Reprint of 2nd edition. New York: Dover 1981.

Moivre, A. de 1756. The Doctrine of Chances: or, A Method of Calculating the Probabilities of Events in Play. 3rd ed. London: A. Millar.

Moore, D. S. 1991. Statistics. Concepts and Controversies. 3rd ed. New York: Freeman & Comp.

Morgan, M. S. 1990. The History of Econometric Ideas. Cambridge: University Press.

Morrison, D. E., Henkel, R. E. (eds.) 1970. The Significance Test Controversy. Chicago: Aldine Publ.

Nagel, E. 1939. Principles of the Theory of Probability. International Encyclopedia of Unified Science, Vol. I, No. 6. Chicago: University of Chicago Press.

Naumann, M. 1984. Artikel aus der von Diderot und D'Alembert herausgegebenen Enzyklopädie. Frankfurt: Röderberg-Verlag.

Newman, J. R. 1956. The World of Mathematics. 4 vols. New York: Simon and Schuster.

Neyman, J. 1934. On the Two Different Aspects of the Representative Method: The Method of Stratified Sampling and the Method of Purposive Selection. Journal of the Royal Statistical Society 97, 558–625.

Neyman, J. 1937. Outline of a Theory of Statistical Estimation Based on the Classical Theory of Probability. Philosophical Transactions of the Royal Society (A), No. 236, 333–380.

Neyman, J. 1967. A Selection of Early Statistical Papers. Berkeley: University of California Press.

Neyman, J. 1971. Foundations of Behavioristic Statistics. In: V. P. Godambe, D. A. Sprott, eds., Foundations of Statistical Inference, 1–19. Toronto: Holt, Rinehart and Winston.

Neyman, J., Pearson, E. S. 1928. On the Use and Interpretation of Certain Test Criteria for Purposes of Statistical Inference, Part I. Biometrika 20, 175–240.

Oaklander, L. N., Smith, Q. (eds.) 1994. The New Theory of Time. New Haven: Yale University Press.

Opp, K.-D. 1999. Methodologie der Sozialwissenschaften. 4. Aufl. Opladen: Westdeutscher Verlag.

Pearson, K. 1896. Mathematical Contributions to the Theory of Evolution, III: Regression, Heredity, and Panmixia. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Ser. A 187, 254–318.

Petty, W. 1986. Schriften zur politischen Ökonomie und Statistik. Übers. und hrsg. von W. Görlich. Berlin: Akademie-Verlag.

Pfanzagl, J. 1972. Allgemeine Methodenlehre der Statistik I. 5. Aufl. Berlin: de Gruyter.

Plato, J. von 1998. Creating Modern Probability. Cambridge: Cambridge University Press.

Popper, K. 1949. Naturgesetze und theoretische Systeme. In: H. Albert, Hg., Theorie und Realität, 43–58. Tübingen: Mohr 1972.

Popper, K. 1957. Die Zielsetzung der Erfahrungswissenschaft. In: H. Albert, Hg., Theorie und Realität, 29–41. Tübingen: Mohr 1972.

Popper, K. 1966. Logik der Forschung. 2. Aufl. Tübingen: Mohr.

Porter, T. M. 1986. The Rise of Statistical Thinking 1820–1900. Princeton: Princeton University Press.

Quenouille, M. H. 1950. Introductory Statistics. Oxford: Pergamon Press.

Quetelet, A. 1835. Über den Menschen und die Entwicklung seiner Fähigkeiten oder Versuch einer Physik der Gesellschaft. Übers. von V. A. Riecke. Stuttgart 1838.

Ramsey, F. P. 1926. Truth and Probability. In: Ders., The Foundations of Mathematics and other Logical Essays, 156–198. London: Routledge & Kegan Paul 1931.

Ramsey, F. P. 1929. Probability and Partial Belief. In: Ders., The Foundations of Mathematics and other Logical Essays, 256–257. London: Routledge & Kegan Paul 1931.

Ramsey, F. P. 1931. The Foundations of Mathematics and other Logical Essays. London: Routledge & Kegan Paul.

Rassem, M., Stagl, J. (Hg.) 1994. Geschichte der Staatsbeschreibung. Berlin: Akademie-Verlag.

Reichenbach, H. 1945. Reply to D. C. Williams' Criticism of the Frequency Theory of Probability. Philosophy and Phenomenological Research 5, 508–512.

Reichenbach, H. 1949. Wahrscheinlichkeitslehre. Reprint in: Gesammelte Werke Bd. 7. Hrsg. von A. Kamlah, M. Reichenbach. Braunschweig: Vieweg 1994.

Reichenbach, H. 1951. Probability Methods in Social Science. In: D. Lerner, H. D. Lasswell, eds., The Policy Sciences, 121–128. Stanford: Stanford University Press.

Rényi, A. 1966. Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften.

Rescher, N. 1996. Process Metaphysics. An Introduction to Process Philosophy. New York: State University of New York Press.

Robertson, J. M. 1905. Letters on Reasoning, 2nd ed. London: Watts & Co.

Rohwer, G., Pötter, U. 2001. Grundzüge der sozialwissenschaftlichen Statistik. Weinheim: Juventa.

Rohwer, G., Pötter, U. 2002. Methoden sozialwissenschaftlicher Datenkonstruktion. Weinheim: Juventa.

Ross, F. A. 1934. The Use of Statistical Data and Techniques in Sociology. In: L. L. Bernard, ed., The Fields and Methods of Sociology, 458–475. New York: Ray Long & Richard Smith.

Russell, B. 1996. The Principles of Mathematics (first edition 1903). London: Norton & Comp.

Schaich, E. 1990. Schätz- und Testmethoden für Sozialwissenschaftler. München: Vahlen.

Scheuch, E. K., Rüschemeyer, D. 1956. Soziologie und Statistik. Kölner Zeitschrift fuer Soziologie und Sozialpsychologie 8, 272–291. In: E. Topitsch, Hg., Logik der Sozialwissenschaften, 345–363. Köln: Kiepenheuer & Witsch 1972.

Schmetterer, L. 1966. Einführung in die mathematische Statistik. 2. Aufl. Wien: Springer-Verlag.

Schneider, I. (Hg.) 1988: Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie von den Anfängen bis 1933. Einführungen und Texte. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Schnell, R., Hill, P. B., Esser, E. 1999. Methoden der empirischen Sozialforschung. 6. Aufl. München: Oldenbourg.

Sirkin, R. M. 1995. Statistics for the Social Sciences. Thousand Oaks: Sage.

Siskin, B., Staller, J., Rorvik, D. 1989. What are the Chances? Risks, Odds, and Likelihood in Everyday Life. New York: Crown Publ.

Sixtl, F. 1993. Der Mythos des Mittelwerts. Neue Methodenlehre der Statistik. München: Oldenbourg.

Smart, J. J. C. 1963. Philosophy and Scientific Realism. London: Routledge & Kegan Paul.

Smith, T. M. F. 1976. The Foundations of Survey Sampling: A Review (with Discussion). Journal of the Royal Statistical Society A 139, 183–204.

Stadler, F. 1990. Richard von Mises (1883–1953) – Wissenschaft im Exil. In: R. von Mises, Kleines Lehrbuch des Positivismus, 7 –51. Frankfurt: Suhrkamp.

Stegmüller, W. 1973a. Personelle und statistische Wahrscheinlichkeit. 1. Halbband: Personelle Wahrscheinlichkeit und Rationale Entscheidung. Berlin: Springer-Verlag.

Stegmüller, W. 1973b. Personelle und statistische Wahrscheinlichkeit. 2. Halbband: Statistisches Schließen, statistische Begründung, statistische Analyse. Berlin: Springer-Verlag.

Stegmüller, W. 1983. Erklärung, Begründung, Kausalität (Probleme und Resultate der Wissenschaftstheorie und Analytischen Philosophie, Band I). Berlin: Springer-Verlag.

Stinchcombe, A. L. 1968. Constructing Social Theories. New York: Harcourt, Brace & World.

Stouffer, S. A. 1934. Sociology and Sampling. In: L. L. Bernard, ed., The Fields and Methods of Sociology, 476–488. New York: Ray Long & Richard Smith.

Struik, D. J. 1934. On the Foundations of the Theory of Probability. Philosophy of Science 1, 50–70.

Tschuprow, A. A. 1905. Die Aufgaben der Theorie der Statistik. Jahrbuch für Gesetzgebung, Verwaltung und Volkswirtsch. im Deutschen Reich 29, 11–70.

Tschuprow, A. A. 1906. Statistik als Wissenschaft. Archiv für Sozialwissenschaft und Sozialpolitik 23, 647–711.

Uspensky, J. V. 1937. Introduction to Mathematical Probability. New York: McGraw-Hill.

Uspenskii, V. A., Semenov, A. L., Shen, A. K. 1990. Can an Individual Sequence of Zeros and Ones be Random? Russian Mathematical Surveys 45, 121–189.

Venn, J. 1888. The Logic of Chance. An Essay on the Foundations and Province of the Theory of Probability. 3rd ed. London: Macmillan.

Wærden, B. L. van der 1975. Historische Einleitung. In: Jakob Bernoulli, Werke, Band III, 1–18. Basel: Birkhäuser.

Weber, M. 1921. Wirtschaft und Gesellschaft. 1. Halbband. 5. Aufl. Hrsg. von J. Winckelmann. Tübingen: Mohr 1976.

White, A. R. 1975. Modal Thinking. Oxford: Basil Blackwell.

Whittle, P. 1992. Probability via Expectation. New York: Springer-Verlag.

Winkler, W. 1931. Grundriss der Statistik I: Theoretische Statistik. Enzyklopädie der Rechts- und Staatswissenschaft, Bd. 46. Berlin: Springer-Verlag.

Wolff, H. 1926. Theoretische Statistik. Grundrisse zum Studium der Nationalökonomie. Bd. 20. Jena: Fischer.

Wolff, H. 1932. Die Fiktion in der Statistik. In: A. Seidel, Hg., Die Philosophie des Als Ob und das Leben, 123–139. Berlin: Reuther & Reichard. Neudruck: Aalen: Scientia Verlag 1986.

Wundt, W. 1886. Wer ist der Gesetzgeber der Naturgesetze? Philosophische Studien (Hg. W. Wundt) III, 493–496.

Wundt, W. 1908. Logik. Bd. 3: Logik der Geisteswissenschaften. Stuttgart: Enke.

Yule, G. U., Kendall, M. G. 1950. An Introduction to the Theory of Statistics. 14th ed. London: Griffin.

Zizek, F. 1912. Soziologie und Statistik. München: Duncker & Humblot.

Zizek, F. 1921. Grundriß der Statistik. München: Duncker & Humblot.

Namenverzeichnis